УДК 512.542 : 159.923

Банару А.М.

КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ИНТЕРТИПНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Конечные кристаллографические группы симметрии описывают интертипные отношения в стандартной модели А. Обсуждаются геометрические интерпретации кристаллографических групп, их минимальные порождающие наборы и определяющие соотношения.

Ключевые слова: симметрия, кристаллографическая группа, порождающий элемент, интертипные отношения.

Кристаллография как раздел математической физики занимается вопросами симметрии кристаллических структур. Считается, что первой серьезной работой по кристаллографии был изданный в XVII веке трактат И. Кеплера «О шестиугольных снежинках». В этой работе знаменитый математик и астроном задумался о причинах столь правильной формы падающих с неба частиц снега. При всем разнообразии декорирования лучей их число, исходящее из центра снежинки, всегда равно шести. Много столетий позже, в первой половине XX века, эксперимент по рентгеновской дифракции на кристалле водного льда показал, что форма снежинки не случайна: она обусловлена внутренним строением кристаллической структуры водного льда, чья кристаллическая решетка как раз обладает шестиугольной (гексагональной) симметрией. Так была подтверждена гениальная догадка И. Кеплера о том, что внешняя форма кристалла проистекает из его внутренней правильной структуры.

Надо сказать, что «обычная» снежинка получается только в «обычных» условиях земной атмосферы. Диаграмма фазовых состояний воды необычайно сложна: известно почти два десятка структур водного льда, в которых молекулы воды упорядочены по-разному. Многие из этих структур удалось получить только в экстремальных условиях, при очень низкой температуре и высоком давлении. Кроме того, фрагменты водных льдов сохраняются в тех кристаллах, где молекулы воды «замерзли» вместе с другими молекулами, и разнообразие наблюдаемых структур поистине колоссально [1], хотя все они обладают правильным внутренним устройством.

Симметрия конечных фигур, в том числе выращенных кристаллов, в кристаллографии описывается так называемыми точечными группами, досконально изученными во второй половине XIX века немецким математиком А. Шенфлисом. Вообще, история теории групп поистине захватывающая. Первооткрывателем такой замечательной конструкции как группа является гениальный француз Э. Галуа, трагически погибший на дуэли в возрасте всего двадцати лет. Ни при жизни, ни в течение довольно долгого времени после смерти его труды не были оценены, потому что придуманная им математическая конструкция и примененный к ним подход существенно опережали время своего появления. Лишь несколько десятилетий спустя группами всерьез занялся соотечественник гениального француза, К. Жордан, у которого появилось много учеников и последователей [2]. Одним из них был норвежец С. Ли, впоследствии родоначальник теории бесконечных групп (состоящих из бесконечного числа элементов). Другим был немец Ф. Клейн, впоследствии занимавшийся исключительно конечными группами (с конечным числом элементов). Среди аспирантов Ф. Клейна и появился талантливый математик А. Шенфлис, благодаря которому теория групп появилась в физике, химии, кристаллографии и других естественных науках. Точечные группы в этих науках с тех пор обозначаются по системе Шенфлиса, придумавшего для них удобную символику. Например, симметрия плоской шестиугольной снежинки в этой системе обозначается как D_{6h}.

Конечных точечных групп бесконечно много, потому что фигура может обладать сколь угодно высокой и притом конечной осевой симметрией. Однако только 32 точечные группы могут отвечать симметрии кристаллов (вроде снежинки), и такие группы называют кристаллографическими. Несмотря на обилие разнообразных форм, встречающихся у кристаллов, каждую можно отнести к одному из 32-х возможных типов симметрии.

Кристаллографические точечные группы отличаются друг от друга по нескольким параметрам. Во-первых, в них может содержаться разное число элементов: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 или 48. Все эти числа, за исключением единицы, кратны 2, 3, 4 или 6. Оказывается, что число элементов, кратное 5, а также 7, 8 и т.д., несовместимо с кристаллической решеткой, однако может встречаться у квазикристаллов, о чем мог бы квалифицированно рассказать нобелевский лауреат Д. Шехтман, обнаруживший в 80-е годы XX века квазикристаллическую симметрию у некоторых сплавов марганца, самый известный из которых с тех пор называется шехтманитом.

Второе важное отличие этих групп друг от друга состоит в том, что у них может быть разное число *порождающих* элементов. Каждый элемент кристаллографической группы может быть представлен в виде произведения конечного числа исходных элементов, которые таким образом *порождают* все остальные. Исходный набор порождающих элементов часто может быть выбран несколькими способами, однако число элементов в таком наборе постоянно для каждой группы. У кристаллографических групп может быть 1, 2 или 3 порождающих элемента. В пространствах большей размерности, чем трехмерное евклидово пространство, возможно и большее число порождающих элементов.

Разумеется, существует и много других свойств и особенностей кристаллографических групп, однако здесь мы не ставим своей целью дать исчерпывающую характеристику этим красивым объектам, а интересуемся ими только в той мере, которая полезна при обсуждении интертипных отношений в соционике. Заинтересованный читатель всегда может обратиться к специализированной литературе, которой издано очень много в силу математической привлекательности теории групп, а также к научно-популярным изданиям. Относительно недавно вышла в свет автобиографическая книга американского математика Э. Френкеля [3], уроженца подмосковной Коломны, который своими исследованиями показывает поистине вездесущесть теории групп в вопросах устройства окружающей нас действительности. В конце концов, оформившиеся в теоретической физике теории струн и суперструн, касающиеся происхождения элементарных частиц, тоже основаны на теории групп, хотя и несравненно более сложных, чем кристаллографические.

Группы C_{2v}, C_{2h}, D_2

Эти кристаллографические группы с математической точки зрения представляют собой одну и ту же абстрактную группу, по-разному реализованную в движениях трехмерного пространства. Такие группы называют изоморфными, и они имеют совершенно идентичную структуру с точностью до обозначений. Группы C_{2v}, C_{2h}, D_2 содержат четыре элемента и являются коммутативными, или абелевыми, т.е. умножение в них коммутативно ($ab = ba$). Генетический код этих групп одинаков и содержит ровно два порождающих элемента (a и b). Третьим и четвертым элементами группы являются тождественное преобразование e и произведение ab. В абстрактной теории групп принято задавать группу через ее порождающие элементы с помощью определяющих соотношений, под которыми подразумеваются те степени порождающих элементов группы, а также их двойные, тройные, четверные и т.д. произведения, которые равны тождественному преобразованию. В нашем случае порождающих элементов всего два, поэтому определяющих соотношений всего три (две степени и парное произведение), а именно: $a^2 = b^2 = abab = e$. Любое свойство группы в конечном счете выводится из ее порождающих соотношений, однако для более наглядной демонстрации взаимодействия элементов иногда составляют *граф Кэли*, сообщающий эту же информацию графически. Графам Кэли и их применению в соционике посвящены несколько работ (в первую очередь [4] и [5–7]).

Группа C_{2v} очень известна в физике и химии благодаря тому, что она отвечает симметрии молекулы воды. Роль элементов a, b и ab здесь играют движения, при которых молекула самосовмещается (рис. 1): две плоскости симметрии и ось между ними, которая приводит к самосовмещению молекулы при повороте ее на 180°.

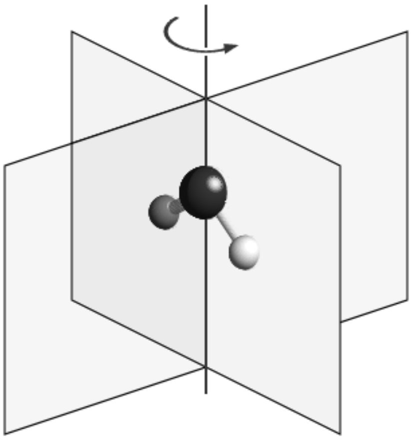


Рис. 1. Элементы симметрии молекулы воды.

Эта же абстрактная группа описывает отношения между типами темперамента по Г. Айзенку (меланхолик, холерик, флегматик, сангвиник), а также интертипные отношения в некоторых малых группах социона (всего существует 13 малых групп такого типа, более подробно об этом можно прочитать в [8]). Г. Рейнин утверждает [9, с.239], что эта группа отвечает структуре мыслительной деятельности, по Ж. Пиаже, однако найти прямое указание на это в работах последнего нам не удалось. Очевидно, что Ж. Пиаже не был знаком с теорией групп так же хорошо, как Г. Рейнин, и не мог дать такой точной интерпретации своим конструкциям.

Группа D_{2h}

Эта группа описывает симметрию прямоугольного параллелепипеда, который изучают на уроках геометрии в школах всего постсоветского пространства. У этого, говоря попростому, «кирпича» есть три взаимно перпендикулярных плоскости симметрии и три оси симметрии по линиям их пересечения, аналогичные таковой у молекулы воды (см. предыдущий раздел). В точке пересечения всех осей плоскостей находится центр симметрии. Вместе с тождественным преобразованием эта группа содержит 8 элементов, из которых три – порождающие, они могут быть обозначены a, b и c. Определяющие соотношения между ними таковы: $a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = (bc)^2 = (ca)^2 = e$.

В интертипных отношениях есть два образа этой группы, пересекающихся по так называемому центру группы интертипных отношений [10], который включает в себя отношения ТО, ДУ, ПО и СЭ. В одном из этих образов среди прочих элементов есть отношения РО и ДЕ, а в другом – АК и КВ. Каждая из этих пар, дополненная отношениями ДУ или ПО, порождает не что иное как 8-элементную группу симметрии «кирпича». Заметим, что отношение СЭ не входит ни в один из возможных порождающих наборов такой группы [11].

Группы C_4, S_4

Эти изоморфные группы содержат один порождающий элемент a со всеми его целыми степенями, причем $a^4 = e$. В кристаллографии такая симметрия встречается нечасто, а среди интертипных отношений ей отвечают отношения З± или Р±, объединенные вместе с ТО и СЭ.

Группа C_{4h}

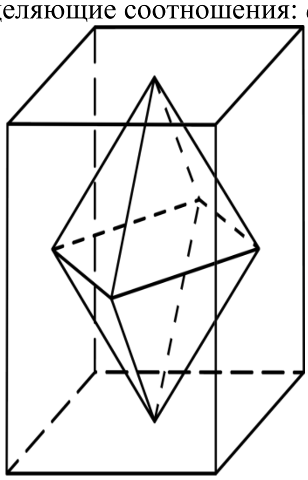
Пожалуй, самая известная геометрическая фигура, обладающая такой симметрией, – это четырехугольная свастика. Плоскость свастики является ее плоскостью симметрии, а ось, проходящая перпендикулярно этой плоскости через центр свастики, приводит к самосовмещению фигуры при повороте на 90°. Единственная группа интертипных отношений, изоморфная этой, помимо ТО содержит все асимметричные отношения (одно из которых можно обозначить a) с добавлением ПО и ДУ (b), а также порожденное ими СЭ. Определяющие соотношения в этой группе $a^4 = b^2 = aba^3b = e$.

Группы C_{4v}, D_4, D_{2d}

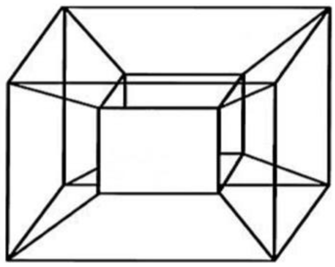
Эти три группы изоморфны друг другу и являются результатом объединения группы C_4 (S_4) с еще одним порождающим элементом, кроме тех, что входят в центр группы интертипных отношений: $a^4 = b^2 = (ab)^2 = e$. Самая наглядная фигура с симметрией такого типа – квадратная (тетрагональная) пирамида. Общее число таких групп, составленных из интертипных отношений, равно четырем.

Группа D_{4h}

Эта группа изоморфна группе всех интертипных отношений, а простейшие геометрические тела с такой симметрией – квадратная (тетрагональная) призма и такая же бипирамида. Эти тела одинаково предпочтительны для наглядных соционических моделей, потому что они дуальны друг другу (центры граней одного являются вершинами другого, рис.2а). Лишь благодаря стечению обстоятельств в соционике, скорее всего, приживется именно призма, а не бипирамида [12]. Группа D_{4h} имеет три порождающих элемента, как D_{2h}, но более сложные определяющие соотношения: $a^4 = b^2 = c^2 = (bc)^2 = (ac)^2 = aba^3b = e$.



а



б

Рис. 2. Тетрагональная призма и дуальная ей бипирамида (а), вложение четырехмерного параллелепипеда в трехмерное пространство (б).

Любая группа симметрии обладает своего рода внутренней симметрией, или автоморфизмами. В [13] было показано, что полная группа автоморфизмов интертипных отношений содержит 64 элемента. Фактически, этим числом определяются возможные варианты реализации формализма интертипных отношений (матричного или любого другого) внутри одной модели.

Прочие группы

В предыдущих разделах мы не обсуждали кристаллографические группы C_2, C_s и C_i в силу их чрезвычайной простоты. Каждая из них состоит из двух элементов, a и e, причем $a^2 = e$. Такую группу образует любое симметричное интертипное отношение в паре с ТО.

В поле нашего рассмотрения не попали такие кристаллографические группы, как C_3, C_6, S_6, S_3, C_{3v}, D_3, C_{6h} C_{6v}, D_6, D_{3d}, D_{3h}, D_{6h}, T, T_h, T_d, O, O_h, т.е. больше половины от общего числа. Среди них всего 10 абстрактно неэквивалентных групп, и им не отвечают никакие множества интертипных отношений в рамках модели А. В этих группах имеется, как минимум, один элемент третьего порядка ($a^3 = e$), не имеющий аналогов в соционике. Будет ли кем-то придумана, параллельно соционике, типология с отношениями третьего порядка?

В заключение отметим, что неизоморфная D_{4h} группа признаков Рейнина тоже кристаллографическая, но не трех-, а четырехмерная (она является аналогом D_{2h} с четырьмя порождающими элементами). Наиболее адекватной иллюстрацией такой симметрии является прямоугольный гиперпараллелепипед (рис. 2 б).

Литература:

1. *Банару А.М., Словохотов Ю.Л.* Кристаллогидраты органических соединений. // Журнал структурной химии. – 2015. – Т. 56. – №5. – С. 1024-1040.
2. *Галиулин Р.В.* К 150-летию Евграфа Степановича Федорова (1854–1919). Неправильности в судьбе теории правильности. // Кристаллография. – 2003. – Т. 48. – №6. – С. 965-980.
3. *Френкель Э.* Любовь и математика. Сердце скрытой реальности. – СПб: Питер, 2018. – 352 с.
4. *Банару А.М.* О группах дихотомий Юнга. // Соционика, ментология и психология личности (СМиПЛ). – 2014. – №4. – С. 55-58.
5. *Минаев Ю.П., Даценко И.П., Попович М.А.* Граф Кэли для группы операторов классических интертипных отношений. // СМиПЛ. – 2015. – №3. – С. 43-49.
6. *Минаев Ю.П., Даценко И.П., Попович М.А.* От графа Кэли для группы операторов классических интертипных отношений к структурной формуле соционa. // СМиПЛ. – 2015. – №4. – С. 23-28.
7. *Минаев Ю.П., Даценко И.П., Пинда М.В.* Визуализация структуры классических интертипных отношений в соционе. // Психология и соционика межличностных отношений. – 2017. – №9-10. – С. 55-62.
8. *Банару А.М., Енина Д.А.* Геометрическое представление группы интертипных отношений. // СМиПЛ. – 2014. – №2. – С. 25-31.
9. *Рейнин Г.* Тайны типа. Модели. Группы. Признаки. – М.: Черная белка, 2009. – 304 с.
10. *Минаев Ю.П.* Правила коммутации для операторов интертипных отношений. // Психология и соционика межличностных отношений. – 2015. – №4. – С. 34-39.
11. *Банару А.М.* От структурной формулы социона к деактуализации асимметричных интертипных отношений. // СМиПЛ. – 2015. – №5. – С. 50-54.
12. *Минаев Ю.П., Даценко И.П., Шевченко Е.Г.* Шесть простых упражнений для начала интерактивного ознакомления с математическим аппаратом теории интертипных отношений. // Психология и соционика межличностных отношений. – 2016. – №7-8. – С. 55-66.
13. *Банару А.М.* Автоморфизмы группы классических интертипных отношений. // СМиПЛ. – 2015. – №6. – С. 55-57.

Статья поступила в редакцию 22.08.2018 г.