

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В СОЦИОНИКЕ

УДК 519.7+51.7

Грицак В. В., Грицак Ю., Иглин С. П.

СТАЦИОНАРНАЯ АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЩЕСТВЕННЫХ ОТНОШЕНИЙ

В статье предлагается математическая модель общества как категории, объектами которой являются люди, а морфизмами – взаимоотношения между ними. Разработанные алгоритмы позволяют однозначно проводить разбиение общества на отдельные прослойки, выбирать совокупности социально влиятельных членов, рассчитывать ядро влияния. Для всех разработанных алгоритмов созданы программные реализации, которые могут быть использованы для решения проблем заказчика.

Предложенные алгоритмы подходят только для демократических обществ.

Ключевые слова: категория, объект, морфизм, алгоритм.

1. Введение

Задачи анализа общественных отношений являются, как правило, многомерными, что значительно усложняет их решение [1, 4, 5]. Общество состоит из большого числа отдельных личностей, и отношения между ними носят разнообразный характер. Имеют место прямые и не прямые контакты между людьми, непосредственное и опосредованное влияние, самовнушение, различные виды обратных связей. Между одними людьми возникают более тесные контакты, чем между другими, что приводит к расслоению общества на отдельные группы. Одни люди – более влиятельные, а другие, наоборот, подвержены влиянию. Решению всех этих проблем и посвящена предлагаемая статья.

Другая задача, которая решается в статье, – это влияние решений отдельных личностей на решения общества. Каждое общество имеет свои собственные правила принятия решений. Если комбинация индивидуальных решений определена, решения общества достигаются в соответствии с этими правилами. Возможно, наиболее знакомый пример реализации социальных правил – это выборы в Верховную Раду. Заполняя избирательный бюллетень, каждый избиратель высказывает своё решение относительно выбора кандидата от той или иной партии, которые претендуют на место в Верховной Раде. Как только модель индивидуальных решений сформирована, правило большинства голосов выдаёт социальное решение. Если модель изменяется, изменяются и социальные решения. Математик сказал бы, что социальное решение – это функтор F из индивидуальной категории K в социальную фьючерсную категорию S , где композиция индивидуальных решений определяет морфизм социального решения:

$$F : K \rightarrow S. \quad (1)$$

В работе предлагается алгоритмически - структурная теория [2] исследования функтора F и категории K в (1).

2. Основные обозначения

Исходя из нетрадиционности употребления современной математической терминологии в социальных исследованиях, приведём краткий глоссарий математических терминов, которые мы будем использовать.

2.1. Бинарные отношения

Рассмотрим множество V из n элементов $v_1, v_2, \dots, v_n$. В наших приложениях мы будем рассматривать общество как множество людей. Множество всевозможных упорядоченных пар

элементов множества $\mathbf{V}$ называется *декартовым произведением* и обозначается $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$. У нас это – множество всевозможных связей между людьми. В реальном обществе не все люди связаны со всеми, поэтому мы будем рассматривать только подмножество $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$, которое называется *бинарным отношением*. В обществе бинарное отношение – это связь человека v_i с v_k или влияние v_i на v_k , которое обычно обозначают или стрелкой: $v_i \rightarrow v_k$, или любым другим похожим знаком, например: $v_i > v_k$. Математический знак ">" (больше) соответствует нашим обыденным представлениям: если v_i влияет на v_k , то v_i – более влиятельный член общества, чем v_k .

Бинарное отношение $\{>\} \subseteq \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ на $\mathbf{V}$ называется:

- *рефлексивным*, если $v > v$ имеет место $\forall v \in \mathbf{V}$ (человек всегда влияет сам на себя);
- *транзитивным*, если из $v_1 > v_2$, $v_2 > v_3$ следует, что $v_1 > v_3$ $\forall v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{V}$ (опосредованное влияние одних людей на других);
- *полным*, если $v_1 > v_2$ или $v_2 > v_1$ выполняется $\forall (v_1, v_2) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ (в обществе это выполняется не всегда);
- *антисимметричным*, если из $v_1 > v_2$, $v_2 > v_1$ следует, что $v_1 = v_2$ (людей, которые взаимно влияют друг на друга прямо или опосредованно, считаем одинаково влиятельными);
- *асимметричным*, если из $v_1 > v_2$ следует, что $v_2 > v_1$ не может выполняться (в обществе этого может и не быть);
- *симметричным*, если из $v_1 > v_2$ следует, что $v_2 > v_1$ (у нас – не обязательно);
- *квазиупорядоченным*, если оно рефлексивное и транзитивное;
- *эквивалентным*, если оно рефлексивное, транзитивное и симметричное;
- *предупорядоченным*, если оно рефлексивное, транзитивное и полное;
- *частично упорядоченным*, если оно рефлексивное, транзитивное и антисимметричное;
- *полностью упорядоченным*, если оно рефлексивное, транзитивное, полное и антисимметричное.

В частности, для построения модели общественных отношений мы должны рассматривать рефлексивные, транзитивные и антисимметричные отношения между его членами. Иногда такие общества бывают полностью упорядоченными, но чаще всего – только частично.

2.2. Категории

Стандартное определение категории $\mathbf{K}$, приведенное в [3], включает в себя объекты $\mathbf{Ob}(\mathbf{K})$ и морфизмы $\mathbf{Mor}(\mathbf{K})$, которые задают правила отображения одного объекта в другой, или, как в нашем случае, отношение между двумя объектами. Исследуемое общество мы будем представлять в виде некоторой категории $\mathbf{K}$, объекты которой – это люди (граждане общества), а морфизмы – связи между ними. Будем рассматривать только *конечные* категории, т.е. такие, для которых число объектов $|\mathbf{Ob}(\mathbf{K})| = n$ и число морфизмов $|\mathbf{Mor}(\mathbf{K})| = m$ являются конечными: $n, m \in \mathbf{N}$.

Пусть задана конечная категория $\mathbf{K} = (\mathbf{Ob}(\mathbf{K}), \mathbf{Mor}(\mathbf{K}))$. По определению категории её морфизмы задают частичное упорядочение на её объектах:

$$v_1 > v_2 \Leftrightarrow \exists f: v_1 \rightarrow v_2, v_1, v_2 \in \mathbf{Ob}(\mathbf{K}), f \in \mathbf{Mor}(\mathbf{K}),$$

и объект v_1 будем в этом случае называть *большим*, чем объект v_2 в категории $\mathbf{K}$.

Объект o будем называть по отношению к объекту u в категории $\mathbf{K}$:

- *$\mathbf{K}$ -эквивалентным*, если $\mathbf{Mor}(o, u) \neq \emptyset$ и $\mathbf{Mor}(u, o) \neq \emptyset$ ($o \Theta_{\mathbf{K}} u$);
- *изоморфным*, если $\exists f \in \mathbf{Mor}(o, u)$, $\exists g \in \mathbf{Mor}(u, o)$, и выполняется: $f \bullet g = \mathbf{id}(o)$, $g \bullet f = \mathbf{id}(u)$, где $\mathbf{id}$ – единичный морфизм, связывающий объект с самим собой ($o \approx u$);
- *всегда большим*, если $\mathbf{Mor}(o, u) \neq \emptyset$ и $\mathbf{Mor}(u, o) = \emptyset$ ($o \blacktriangleright u$);
- *несравненно большим*, если $\exists! f \in \mathbf{Mor}(o, u)$ и $\mathbf{Mor}(u, o) = \emptyset$ ($o \blacktriangleright u$);
- *безусловно большим*, если $\exists! f \in \mathbf{Mor}(o, u)$, f – мономорфизм, и $\mathbf{Mor}(u, o) = \emptyset$ ($o \blacktriangleright u$).

В скобках приведены обозначения, которые мы будем в дальнейшем использовать для этих бинарных отношений.

3. Взаимное влияние в обществе

В общественных отношениях попарно **K**-эквивалентные и изоморфные подмножества объектов категории **K** интерпретируются как, соответственно, зоны влияния и зоны дружественных отношений в обществе. Все объекты, которые оказались в одной зоне влияния, взаимно влияют друг на друга прямо или опосредованно. В каждой зоне дружеских отношений объекты соединены парой противоположно направленных морфизмов.

В каждом из разработанных и описанных ниже алгоритмов исходные данные задаются в виде матрицы морфизмов непосредственного влияния размером $m \times 2$, каждая строка которой задаёт номера объектов, связанных этим морфизмом.

3.1. Алгоритм 1. Матрица влияния

Матрица влияния **D** – это булева матрица размером $n \times n$, каждый элемент которой $d_{ij} = \text{true}$, если существует морфизм между объектами v_i и v_j . В силу рефлексивности на главной диагонали **D** всегда будем оставлять истинные значения. Эта матрица строится путём конечного итерационного процесса: сначала находится матрица непосредственного влияния, потом матрица влияния через 1, 2, 4, 8, и т.д. человек в геометрической прогрессии. Начальная матрица строится по исходным данным: списку морфизмов непосредственного влияния. Далее проводим итерации. На текущей итерации просматриваем каждую i -ю строку матрицы **D** и находим в ней все истинные элементы (объекты, которые уже подвержены влиянию i -го объекта). Пусть это будут, например, номера $l_1, l_2, \dots, l_k$. Тогда к i -й строке **D** прибавляем строки матрицы **D** с номерами $l_1, l_2, \dots, l_k$. Таким образом, получаем матрицу влияния через количество человек в два раза больше, чем на предыдущей итерации. Если на текущей итерации матрица **D** не изменилась, заканчиваем процесс. Листинг этой процедуры в псевдокодах имеет вид:

```
Input: морфизмы категории Mor(1:m, 1:2).
n=max(Mor); {максимальное число – количество объектов}
D=0; {задаём начальную матрицу влияния нулевой}
for i=1:m {просматриваем морфизмы непосредственного влияния}
    D(Mor(i,1),Mor(i,2))=1; {матрица непосредственного влияния}
end {for i}
D ← D + {добавляем диагональ (рефлексивность)}
Dn=D; {для сравнения в критерии выхода}
while true {бесконечные итерации}
    for i=1:n {просматриваем каждую строку матрицы D}
        num ← {номера истинных элементов i-й строки матрицы D}
        for k=1:length(num) {берём каждый такой номер}
            Dn(i,:) ← Dn(i,:) ∪ D(num(k),:); {прибавляем к текущей}
        end {for k}
    end {for i}
    if Dn=D {все элементы одинаковые}
        break; {выходим из бесконечного цикла по итерациям}
    end {if}
    D=Dn; {для продолжения итераций}
end {while}
Output: матрица влияния D(1:n, 1:n).
```

3.2. Алгоритм 2. Зоны влияния в обществе

Объекты категории **K** разбиваем на зоны влияния. Для этого сначала с помощью алгоритма 1 строим матрицу влияния **D**. В ней два объекта v_i и v_j взаимно влияют друг на друга тогда и только тогда, когда $d_{ij} = d_{ji} = \text{true}$. Эти объекты нужно объединить в одну зону влияния. Такое объединение состоит в том, что все объекты, которые подвергаются влиянию со стороны v_i или v_j , будут подвержены влиянию и из их объединения. И, наоборот, полученная зона будет подвержена влиянию со стороны всех объектов, которые влияли и на v_i , и на v_j .

Задаём начальные зоны влияния в виде единичной булевой матрицы **M** размера $n \times n$. В каждом i -й столбце будем делать истинными номера объектов i -й зоны влияния. Таким образом,

сначала мы имеем n зон, в каждой из которых есть только один объект. Ищем какую-нибудь пару внедиагональных истинных элементов матрицы влияния **D** (т.е. пару взаимно влияющих друг на друга объектов). Если таких элементов нет, заканчиваем алгоритм 2. Если же есть $d_{ij} = d_{ji} = \text{true}$, то выполняем такие действия:

- к i -й строке **D** прибавляем j -ю, и удаляем из **D** j -ю строку;
- к i -му столбцу **D** прибавляем j -й, и удаляем из **D** j -й столбец;
- к i -му столбцу **M** прибавляем j -й, и удаляем из **M** j -й столбец.

Таким образом, мы объединили 2 взаимно влияющих друг на друга объекта в одну зону влияния и уменьшили размерность матрицы **D** и количество столбцов **M** на единицу. На этом очередная итерация заканчивается. Далее ищем новую пару внедиагональных истинных элементов в уменьшенной матрице **D** и т.д. В результате мы получим в **M** зоны влияния категории, а матрица **D** уменьшенных размеров будет матрицей влияния уже не отдельных объектов-людей, а зон влияния. Вот как выглядит листинг этой процедуры в псевдокодах:

```
Input: морфизмы категории Mor(1:m,1:2).
n=max(Mor); {максимальное число – количество объектов}
D ← {находим матрицу влияния по алгоритму 1}
M=I(n); {вначале – n зон по 1 объекту: задаём единичную матрицу}
while true {бесконечные итерации}
  if {нет элементов D(i,j)=D(j,i)=true}
    break; {выходим из бесконечного цикла по итерациям}
  end {if}
  (i,j) ← {номер строки и столбца любого элемента, где D(i,j)=D(j,i)=true}
  D(i,:) ← D(i,:) ∪ D(j,:); {прибавляем к i-й строке j-ю}
  D(:,i) ← D(:,i) ∪ D(:,j); {прибавляем к i-му столбцу j-й}
  {удаляем из D j-ю строку и j-й столбец}
  M(:,i) ← M(:,i) ∪ M(:,j); {прибавляем к i-му столбцу j-й}
  {удаляем из M j-й столбец}
end {while true}
Output: M(1:n,1:z), D(1:z,1:z), где z – количество зон влияния.
```

3.3. Алгоритм 3. Зоны дружественных отношений

В зонах влияния находим зоны дружественных отношений. В каждой такой зоне все объекты взаимно связаны друг с другом (в виде линейной цепочки или более сложно) парой противоположно направленных морфизмов. Будем накапливать зоны дружественных отношений (номера объектов) в списке **Z**. Сначала этот список пустой. Просматриваем исходные данные: список морфизмов прямого влияния. Наличие в нём хотя бы одной пары противоположно направленных морфизмов свидетельствует о том, что существует хотя бы одна зона дружественных отношений. Поэтому, если таких пар нет, заканчиваем алгоритм 3 с отрицательным результатом: в исследуемой категории нет ни одной зоны дружественных отношений. В противном случае объекты первой такой пары морфизмов заносим в первый элемент списка **Z**: эти объекты оказались в одной зоне дружественных отношений. Если больше таких пар нет, заканчиваем работу алгоритма 3. В противном случае анализируем дальнейшие пары. Если в какой-то паре хотя бы одно из чисел уже входит в какую-нибудь зону дружественных отношений, то и другое число пары тоже присоединяем к этой зоне и проверяем другие зоны: входит ли в какую-либо из них другое число? Если входит, то объединяем соответствующие зоны. Если же ни одно из чисел пары не входит ни в какую зону, то эта пара начинает формирование новой зоны. Листинг процедуры на псевдокоде имеет вид:

```
Input: морфизмы категории Mor(1:m,1:2).
n=max(Mor); {максимальное число – количество объектов}
D=0; {задаём начальную матрицу влияния нулевой}
for i=1:m {просматриваем морфизмы непосредственного влияния}
  D(Mor(i,1),Mor(i,2))=1; {матрица непосредственного влияния}
end {for i}
Fr ← ∅; {пустой список зон дружественных отношений}
(i,j) ← {все номера строк и столбцов, где M(i,j)=M(j,i)}
```

```

if (i,j)≠∅ {непустые массивы}
  Fr(1)=(i(1) j(1)); {в первую зону записываем первую пару объектов}
  if length(i,j)>1 {если есть другие пары}
    for k=2:length(i,j) {просматриваем их все}
      (ik,jk)=(i(k),j(k)); {взяли текущую пару объектов}
      Cl=0; {флажок для проверки: что с ней будем делать?}
      for k1=1:length(Fr) {сравниваем с уже построенными зонами}
        if ((ik,jk)∩Fr(k1)≠∅) {если есть совпадение с зоной номер k1}
          Fr(k1) ← Fr(k1) ∪ (ik,jk); {добавляем в эту зону}
          Cl=1; {переключили флажок - новой зоны строить не будем}
          break {совпадение найдено - далее уже не проверяем}
        end {if}
      end {for k1}
      if Cl=0 {если совпадения ни с одной зоной нет}
        Fr(end+1)=(ik,jk); {создаём новую зону}
      end {if Cl=0}
    end {for k}
  end {if length(i,j)>1}
end {if (i,j)≠∅}
Output: Fr(1:zf) - зоны дружественных отношений, где zf - количество зон.
Объект Fr должен быть реализован как одномерный массив, в каждом элементе
которого можно хранить список целых чисел переменной длины.

```

3.4. Пример

На рис. 1 показана категория **К** из 25 объектов в виде ориентированного графа [6]. Категория такого размера может описывать, например, штат какой-либо фирмы, руководство политической партии, страны или студенческую группу. Наш пример взят из реальных социальных отношений в одном из политических объединений Украины, но имена людей-объектов на рис. 1 заменены числами. Для большей прозрачности рисунка стрелками показаны только те морфизмы, которые соответствуют непосредственному влиянию объектов друг на друга (исходные данные). Морфизмы-произведения (опосредованное влияние) не показаны. Петли на каждом объекте (условие рефлексивности) также не нарисованы, но предполагается, что они есть.

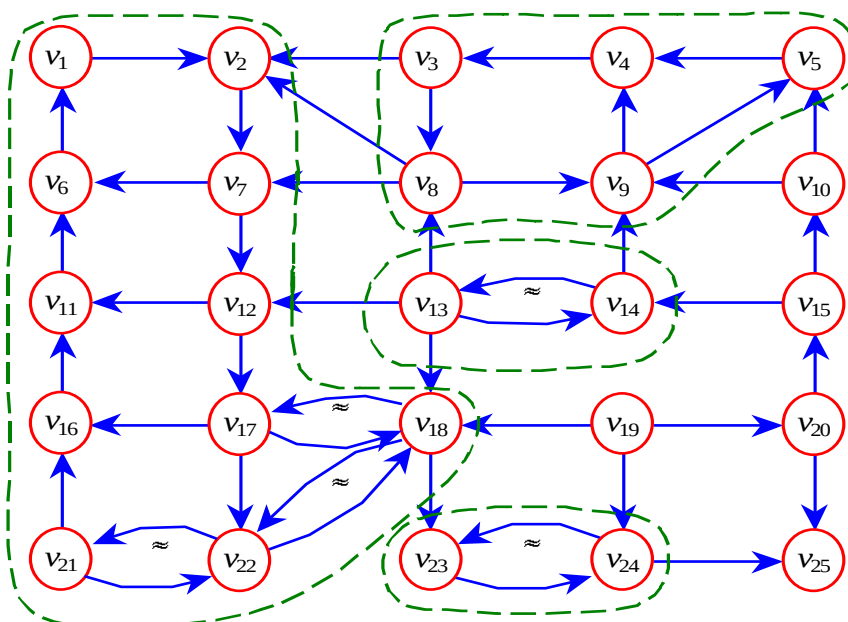


Рис. 1. Зоны влияния и зоны дружественных отношений

На рис. 1 приведены результаты расчётов этой категории по алгоритмам 1 – 3. Штриховыми замкнутыми линиями обведены те объекты, которые оказались в одной зоне

влияния. Необведенные объекты каждый сам по себе являются отдельными зонами влияния. Найдены 3 зоны дружественных отношений: $\{v_{13}, v_{14}\}$, $\{v_{17}, v_{18}, v_{21}, v_{22}\}$ и $\{v_{23}, v_{24}\}$. Они помечены символом $\approx$.

В каждой зоне влияния все объекты связаны друг с другом морфизмами: каждый человек оказывает влияние на любого другого или непосредственно, или через других людей. Каждая зона дружественных отношений образована цепочкой объектов, связанных парой противоположно направленных морфизмов.

4. Иерархия в обществе

Объекты из одной зоны влияния являются **К**-эквивалентными: среди них нельзя выделить больших и меньших. Однако упорядочение больше-меньше может существовать между объектами из разных зон влияния. Поэтому интересно попарно пометить в данной категории **К** всегда большие пары, а среди них найти несравненно большие и безусловно большие объекты. В общественных отношениях они интерпретируются как, соответственно, руководители, лидеры и вожди. Руководитель влияет на подчинённого, но обратного влияния при этом не существует (в рамках наших гипотез). Лидер – это такой руководитель, влияние которого на подчинённого однозначно определено (существует только один морфизм между ними). И, наконец, вождь – это лидер, который не имеет своих лидеров, вождей или руководителей: на него никто не влияет.

4.1. Алгоритм 4. Руководители и лидеры

Находим всегда большие пары объектов (руководителей). Сначала с помощью алгоритма 2 находим зоны влияния **М** и матрицу их влияния **Д** (уменьшённых размеров). Далее к зонам влияния применяем классический алгоритм упорядочения. Для этого находим какой-нибудь истинный элемент матрицы влияния **Д** ниже главной диагонали. Если таких элементов нет, заканчиваем работу алгоритма: все зоны влияния упорядочены. Если же есть $d_{ij} = \text{true}$, $(i > j)$, то:

- заменяем в **Д** местами строки с номерами i и j ;
- заменяем в **Д** местами столбцы с номерами i и j ;
- заменяем в **М** местами столбцы с номерами i и j .

На этом очередная итерация заканчивается. Далее ищем новый $d_{ij} = \text{true}$, $(i > j)$ и т.д.

После окончания работы алгоритма 4 в матрице **М** получим частично упорядоченные зоны влияния. Их матрица влияния **Д** станет верхней треугольной. True на каком-либо месте означает частичное упорядочение соответствующих зон, а false – отсутствие такого упорядочения.

Если задана только одна категория **К**, то любой морфизм между её объектами будет единственным, и алгоритм 4 фактически вычисляет лидеров. Понятия руководителей и лидеров можно различить, только если задать несколько категорий на одних и тех же объектах, но с разными морфизмами. Реализация алгоритма на псевдокоде выглядит так:

Input: морфизмы категории $\text{Mor}(1:m, 1:2)$.

$(M, D) \leftarrow$ (зоны влияния и их матрица влияния – алгоритм 2)

while true {бесконечные итерации}

$(i, j) \leftarrow$ {любой $D(i, j) = \text{true}$; $i > j$ }

 if $(i, j) = \emptyset$ {нет таких}

 break; {выходим из бесконечного цикла по итерациям}

 end {if}

$D(i, :) \leftrightarrow D(j, :)$; {меняем местами строки}

$D(:, i) \leftrightarrow D(:, j)$; {меняем местами столбцы}

$M(:, i) \leftrightarrow M(:, j)$; {меняем местами зоны влияния}

end {while true}

Output: упорядоченные $M(1:n, 1:z)$, $D(1:z, 1:z)$, где z – количество зон влияния.

4.2. Алгоритм 5. Вожди

В алгоритме 5 мы из найденных несравненно больших пар объектов (лидеров) отбираем безусловно большие (вождей). Для этого мы проверяем каждую пару несравненно больших

объектов на выполнение условия: первый объект пары не должен быть вторым объектом любого морфизма. Если это условие выполняется, то эта пара присоединяется к списку безусловно больших пар объектов. Листинг на псевдокоде, реализующий поиск вождей, имеет вид:

Input: морфизмы категории $\text{Mor}(1:m, 1:2)$.
 $\text{Fuh} = \text{Mor}(:, 1) \setminus \text{Mor}(:, 2)$; {вожди будут во всех морфизмах только первыми}
 Output: $\text{Fuh}(1:\text{nfuh})$ – массив объектов – вождей, где nfuh – количество вождей.

4.3. Пример

Для категории с рис. 1 в таблице 1 приведена упорядоченная нумерация зон влияния, а в таблице 2 – их сравнение. Фактически таблица 2 – это упорядоченная матрица **D** зон влияния. Наличие в ней хотя бы одного из трёх символов: ►, ➤ или ➡ свидетельствует об упорядочении соответствующих зон влияния, т.е. про то, что объекты одной зоны значительно больше, чем объекты другой. Наличие символов ➤ или ➡ говорит о несравненно больших объектах, а символа ➡ – о безусловно больших. Отсутствие символов – это отсутствие упорядочения.

Таблица 1. Упорядоченные зоны влияния

Зона	Объекты	Зона	Объекты
1	v_{19}	6	v_3, v_4, v_5, v_8, v_9
2	v_{20}	7	$v_1, v_2, v_6, v_7, v_{11}, v_{12}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{21}, v_{22}$
3	v_{15}	8	v_{23}, v_{24}
4	v_{13}, v_{14}	9	v_{25}
5	v_{10}		

Таблица 2. Сравнение зон влияния

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		➡	➡	➡	➡	➡	➡	➡	➡
2			➤	➤	➤	➤	➤	➤	➤
3				➤	➤	➤	➤	➤	➤
4						➤	➤	➤	➤
5						➤	➤	➤	➤
6							➤	➤	➤
7								➤	➤
8									➤
9									

Для данной категории почти все зоны влияния оказались упорядоченными. Не определён порядок только между двумя зонами влияния: с номерами 4 (объекты $\{v_{13}, v_{14}\}$) и 5 (объект v_{10}). Обычно полное упорядочение свидетельствует о тоталитарной структуре общества, когда те или иные группы граждан чётко и строго ранжированы. Наоборот, полное отсутствие упорядочения говорит об анархии, царящей в обществе. Возможно, существует какая-то золотая середина, которая характерна для демократического общества, но здесь требуются дополнительные совместные исследования социологов и математиков.

Объект v_{19} является вождём для всех остальных объектов категории, т.к. он не подвержен влиянию никаких других объектов, а сам, наоборот, влияет на всех остальных.

5. Сила влияния в обществе

5.1. Взвешивание и потенциал

Категорию **K** назовём взвешенной, если существует отображение

$$V: \text{Mor}(K) \longrightarrow R, \quad (2)$$

где **R** – поле действительных чисел. Число $V(f)$, где $f \in \text{Mor}(K)$, называется весом морфизма f , а отображение (2) назовём взвешиванием. Для взвешивания обычно выполняется

$$V(f) + V(g) = V(f \bullet g), \quad (3)$$

где "+" – обычная операция сложения действительных чисел. Но у нас вес морфизма – это сила влияния одного члена общества на другого. Поэтому правило (3) нам нужно заменить на другое:

$$V(f), V(g) \geq V(f \bullet g) \quad (4)$$

$\forall f, g \in \text{Mor}(K)$, которые могут быть перемножены. Будем интерпретировать правило (4) как уменьшение силы влияния при опосредованном контакте.

Назовем потенциалом объекта алгебраическую сумму весов морфизмов с учётом непрямого влияния: со знаком "+" выходящих из объекта и знаком "-" входящих в него. Очевидно, сумма потенциалов всех объектов равна нулю, т.к. вес каждого морфизма учитывается дважды: один раз со знаком "+", и один – со знаком "-". Потенциал характеризует общее влияние объекта (человека) на других людей в обществе. Положительное значение потенциала характеризует человека влиятельного, а отрицательное – склонного к влиянию со стороны других людей.

5.2. Алгоритм 6. Расчёт силы влияния в обществе

Пусть для каждого морфизма непосредственного влияния задан его вес, а для каждого объекта – коэффициент уменьшения силы влияния при непрямом контакте α_i . По этим данным рассчитываются веса всех морфизмов с учётом опосредованного влияния и потенциалы объектов. Вначале строится система m линейных уравнений для определения общих весов. Эти уравнения похожи на уравнения законов Кирхгофа для электрических цепей. Структура каждого уравнения следующая: общий вес данного морфизма (неизвестная величина) складывается из его веса, который задаётся, и общих весов морфизмов (тоже неизвестных), непосредственно предшествующих текущему, умноженных на α_i . Решив эту систему, находим общие веса всех морфизмов (с учётом непрямого влияния). Далее находим потенциал каждого человека (объекта), суммируя веса всех морфизмов, входящих в объект (со знаком "-") и выходящих из него (со знаком "+"). Листинг процедуры на псевдокоде для этого алгоритма имеет вид:

```

Input: морфизмы категории Mor(1:m,1:2), веса непосредственного влияния W(1:m)
и коэффициенты ослабления силы влияния при непрямом контакте alpha(1:n).
A=I(m); {формируем матрицу системы уравнений: вначале - единичная матрица}
for k=1:m {просматриваем все морфизмы}
    hv=Mor(k,1); {номер объекта, из которого выходит морфизм}
    pr ← (номера всех Mor(:,2)=hv); {какие морфизмы туда входят?}
    for k1=1:length(pr) {для всех этих морфизмов}
        A(k,k1)=-alpha(hv); {учитываем ослабление силы влияния}
    end {for k1}
end {for k}
Weight ← (решение системы линейных уравнений A*Weight=W)
Pot=0; {считаем потенциалы: сначала - нулевые}
for k=1:n {просматриваем все объекты}
    hv ← {Mor(:,1)=k}; {номера выходящих морфизмов}
    vi ← {Mor(:,2)=k}; {номера входящих морфизмов}
    Pot(k)=sum(Weight(hv))-sum(Weight(vi)); {считаем потенциал объекта}
end {for k}
Output: Weight(1:m) - веса морфизмов с учётом непрямого влияния;
Pot(1:n) - потенциалы объектов.
    
```


5.3. Пример

Результаты работы этого алгоритма для категории с рис. 1 приведены на рис. 2 и 3. В этом примере при расчётах мы брали одинаковый единичный вес каждого морфизма непосредственного влияния и $\alpha = 0.5$ для всех объектов. В реальной жизни, конечно, влияние одних людей на других неодинаковое, и затухание силы влияния при непрямом контакте тоже разное, что учтено в алгоритме.

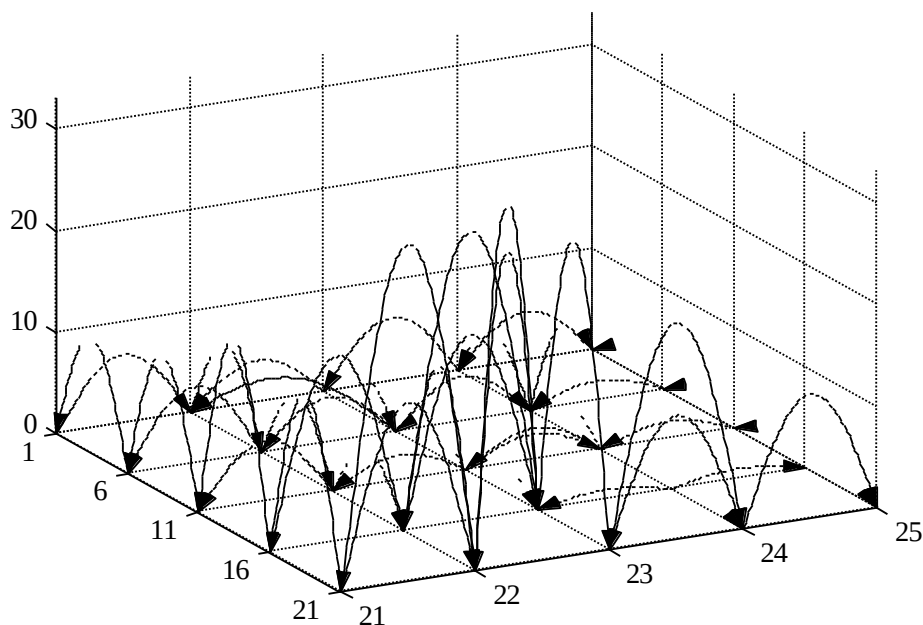


Рис. 2. Веса морфизмов

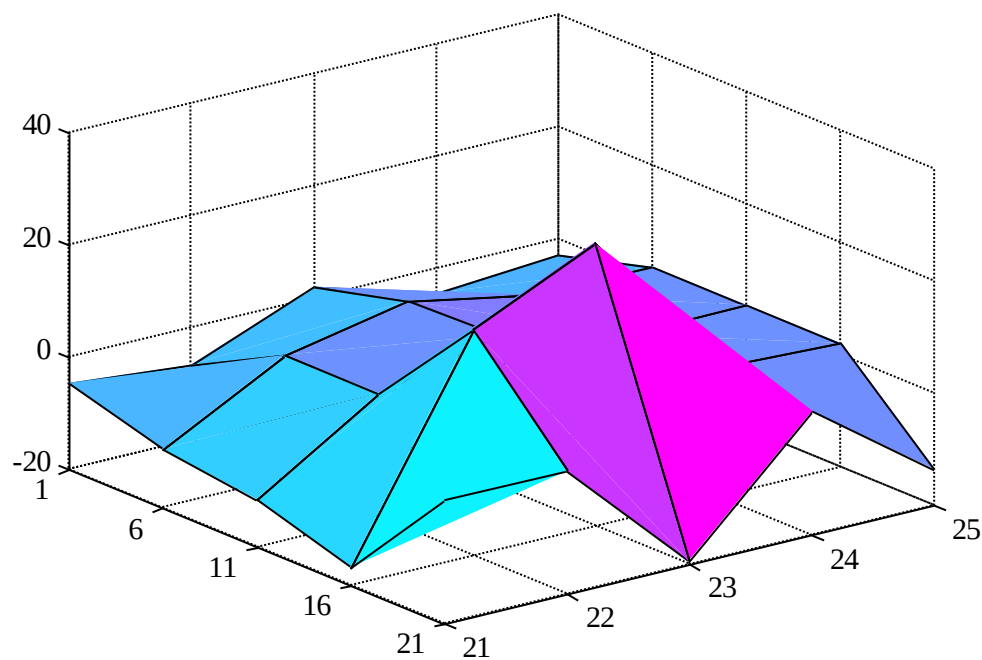


Рис. 3. Потенциалы объектов

На рис. 2 для каждого морфизма высотой дуги обозначен его вес с учётом опосредованного влияния, а на рис. 3 – потенциал каждого объекта. Наивысший потенциал оказался не у вождя (объект v_{19}), а у v_{18} , где он составляет ≈ 30.55275 . В то же время потенциал вождя в нашей модели равен только 3 – в десять раз меньше. Наибольший вес имеют морфизмы, связанные с объектом v_{18} . Этот результат объясняет, почему иногда в общественных отношениях заведующий канцелярией (или секретариатом, администрацией и т.п.) является более влиятельным человеком, чем лидер или вождь: он имеет выход и влияние на большое количество людей.

Найденные значения весов морфизмов являются приближёнными. Алгоритмы расчёта точных весов также разработаны нами в рамках теории измерения социальных отношений. Однако приведённый на рис. 2-3 линейный порядок результатов – точный. Изменение исходных данных в 10, 1000 или 1.1 раз приведёт только к изменению абсолютных значений результатов и не изменит соотношения больше-меньше между ними.

Если при положительных значениях весов морфизмов увеличивать α , то опосредованное влияние одних людей на других при непрямом контакте приводит к увеличению общего веса морфизмов, и при некотором критическом значении α^* настанет момент, когда общие веса приближаются к бесконечности, т.к. матрица коэффициентов в алгоритме 6 вырождается. Для категории с рис. 1 такое $\alpha^* \approx 0.55256$. Докритическим значениям α соответствует стабильное общество, в котором сила взаимосвязи между его членами конечна. Ослабление силы влияния при непрямом контакте играет роль своеобразной отрицательной обратной связи, которая гасит чрезмерное влияние. Если же $\alpha \rightarrow \alpha^*$, то опосредованное влияние гасится недостаточно: люди "накручивают" сами себя и друг друга, общество утрачивает равновесие, что угрожает социальным взрывом. Отслеживать такие моменты и позволяет данный алгоритм.

6. Выводы

В статье рассматриваются немонотонные строго дискретные процессы с затухающим транзитивным взаимодействием. Социальные отношения – одни из наиболее известных процессов такого рода, но далеко не уникальные. Подобным образом ведут себя сильно разрежённые газы и квантовые системы в физике, клетки и гены в биологии, некоторые катализаторы в химии, транквилизаторы и яды в медицине. Поэтому наша теория и алгоритмы после переобозначений и введения соответствующей терминологии могут успешно применяться и в этих областях.

С другой стороны, в общественных отношениях элементами исследуемой совокупности являются люди, граждане данного общества вместе со своей индивидуальной психологией, историей своей жизни и жизни своего народа, национальными и этнографическими особенностями, уровнем образования и другими индивидуальными параметрами. Всё это должно учитываться в точной модели социальных отношений. К сожалению, все эти особенности учесть вместе при современном развитии вычислительной техники невозможно. Но формализовать все эти и другие особенности не составляет большого труда.

Л и т е р а т у р а :

1. Arrow K. J. Social Choice and Individual Values. - Wiley, New York, 1963.
2. Hrycak V.V. Applications of Combinatorial Manifolds for Mathematical Physics and Quantum Logics Problems. - Preprint IK86-14, Kyjiv, 1986, 52 p.
3. Hrycak V.V. Logic and Categorical Theory of Natural Science. -Kyjiv.-SVITTOZIR-ACADEMIA, 1995, 322 p.
4. Hrycak V.V. Some Combinatorial Multicriterial Problems. – Dopovidi UAS, Ser. A., №3, 1983.
5. Roberts F.S. Measurement Theory with Applications to Decisionmaking, Utility, and the Social Sciences. - Addison-Wesley Publishing Company, 1979, 420 p.
6. Roberts F.S. (ed.). Applications of Combinatorics and Graph Theory in the Biological and Social Sciences. Vol. 17 of IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Springer-Verlag, New York, 1989.