МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В СОЦИОНИКЕ

УДК 159.9.075

Дубров Я. А.

ПРИНЦИПЫ АКСИОМАТИЗАЦИИ ПСИХОИНФОРМАТИКИ *

На базе системы аксиом конструируется модель социона в виде категории и доказывается, что эта категория является расплывчатым топосом, т. е. топосом расплывчатых множеств Ω-Set.

Ключевые слова: социон, нуль-категория, решетка, булева алгебра, алгебра Гейтинга, псевдобулева алгебра, булев топос, расплывчатый топос.

Одним из методов аксиоматизации психоинформатики (соционики) есть переход к теоретико-категорным моделям социона. Ниже мы рассмотрим как детерминированные, так и недетерминированные (расплывчатые, нечеткие) модели. Кстати, ряд вопросов, тесно связанных с аксиоматизацией соционики, рассматривал А. В. Букалов во многих своих работах. Это, в частности, закон изменяемости квадр и измеримости различных психических функций, которые легко поддаются математическому моделированию.

1. Первая детерминированная теоретико-категорная модель социона. Эта модель была предложена нами в докладе на XIV Международной конференции по соционике и в статье [1], в которой отображено содержание этого доклада.

Основой этой модели есть Базовая Категория Социона (БКС), объектами которой являются психотипы как интегральные сущности, объединяющие в себе индивидуальные человеческие психотипы. Очевидно, что в БКС существует 16 объектов-психотипов. В этой модели объекты-психотипы не структурируются. Кроме объектов, БКС определяется стрелками-морфизмами, каждая из которых имеет начальный и конечный объекты. В дальнейшем мы естественным образом считаем стрелку-морфизм моделью межтипных психоотношений как взаимодействий целеустремленных систем. При этом объекты (начальные объекты) и кообъекты (конечные объекты) совпадают с объектами психотипов. Отметим, что не отбрасывается случай, когда объекты и кообъекты совпадают, а это означает существование эндопсихоотношений или однотипных отношений, т. е. психоотношений между одинаковыми типами. Как известно, в соционике изучаются «тождественные» психоотношения. Для нас существенным является то, что тождественные психоотношения могут моделироваться тождественными (единичными) стрелками-морфизмами из теории категорий.

При моделировании социона категорией принципиальным есть вопрос о возможности композиции (умножения, суперпозиции, сложения) стрелок-морфизмов, что эквивалентно введению операции композиции на межтипных психоотношениях. Для доказательства существования операции композиции межтипных отношений достаточно воспользоваться матрицей-таблицей Ляшкявичюса-Аугустинавичюте (МЛА). Далее, пользуясь МЛА, легко доказать, что операция композиции психоотношений является ассоциативной. Таким образом, на базе эмпирических данных (МЛА) постулируется существование ассоциативной операции композиции психоотношений как морфизмов БКС.

Итак, 16 психотипов вместе с 16 классическими по А. Аугустинавичюте межтипными отношениями «образуют» БКС. Здесь следует сделать существенное замечание, состоящее в том, что из теории категорий следует, во-первых, что всего тождественных отношений 16, а не одно, поскольку каждое тождественное отношение имеет свой психотип, и, во-вторых, всех межтипных отношений 256, поскольку все симметрические отношения попарно различны. Это следует из того, что для двух типов A и B морфизм (межтипное отношение) $\alpha: A \to B$ и морфизм $\beta: B \to A$ при композиции $\alpha \cdot \beta: A \to A$ дают тождественное от-

* Основные результаты этой работы докладывались на XXI Международной конференции по соционике (Киев, сентябрь 2005).

ношение, что возможно при $\beta = \alpha^{-1}$ (или при $\beta = -\alpha$). При $\beta = \alpha$, как в случае симметричеких отношений (что невозможно в принципе, поскольку $A \neq B$), $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \alpha = \alpha^2$.

2. Нуль-категория как простейшая детерминированная модель соционa. Для конкретизации приведенной выше категорной модели рассматривалась также топосная модель социона и различные варианты категорных моделей. Однако продолжался поиск адекватной категорной модели социона. Такой моделью стала нуль-категория [2, 3]. Нуль-категорную модель социона в терминах соционики можно сформулировать следующим образом. Социон как совокупность 16-ти психотипов, действующих один на другого (и самих на себя) единственным образом, можно моделировать такой категорией с 16-ю объектами, которые связаны между собой «одинарными» морфизмами, т. е. нуль-категорией, под которой мы понимаем категорию, состоящую только из нулевых морфизмов и только из нулевых объектов. В этой категории нулевые объекты являются одновременно и инициальными (т. е. для каждого объекта-психотипа существует один и только один морфизм из инициального объекта в этот объект), и финальными (т. е. для каждого объекта-психотипа существует один и только один морфизм из этого объекта в финальный объект), т. е. они характеризуются тем, что для каждой пары объектов существует один и только один коморфизм (как и морфизм).

Для социона как нуль-категории доказывается ряд теорем [2, 3], в соответствии с которыми социон является нуль-категорией (16, 256) (т. е. категорией с 16-ю объектами и 256-ю морфизмами), образует частичную мультипликативную (аддитивную) полугруппу относительно операции композиции-умножения (композиции-сложения), частичную мультипликативную (аддитивную) группу относительно операций умножения и обращения (сложения и вычитания). Частичность полугруппы и группы означает, что, во-первых, операция умножения (сложения) не определена для всех психоотношений и, во-вторых, тождественные отношения определены для каждого психотипа отдельно, а это означает существование 16-ти единиц (тождественных отношений) вместо одной универсальной единицы для всего социона.

Если рассматривать морфизмы как скаляры (скаляремы), то на них можно строить векторы-строки (контравариантные векторы или векторемы) и векторы-столбцы (ковариантные векторы или ковекторемы) определенной размерности. С использованием этих конструкций в работах [2–3] были построены левый и правый квазимодули, а также векторное квазилинейное пространство. При этом совокупность ковариантных (контравариантных) векторем и скалярем образует левый (правый) «квазимодуль» с операциями умножения слева (справа) векторем на скаляремы и функторного сложения (умножения) векторем. Далее, совокупность векторем, ковекторем и скалярем образует «квазиафинное» («квазивекторное») или «квазилинейное» пространство с операциями скалярного произведения векторем, ковекторем и скалярем.

Отметим, что алгебра Аугустинавичюте является частичной алгеброй с операциями произведения (копроизведения) и композиции кортежей (кокортежей) скалярем.

Заключительным аккордом в построении алгебры Аугустинавичюте, базирующейся на категорной модели социона и классической таблице МЛА, а также на соответствующей таблице умножения психоотношений, есть следующее утверждение.

Алгебра Аугустинавичюте является частичной двухосновной алгеброй с операциями композиции, произведения, копроизведения, функторного произведения, функторного копроизведения и обращения на скаляремах, векторемах, ковекторемах, матремах (матрицах на скаляремах).

Учитывая то, что нуль-категория не является топосом, возникает вопрос о возможности ее преобразования в топос. В работе [3] показано, что топос психотипов и психоотношений, или топос социона содержит, кроме 16-ти стандартных психотипов, еще и пустой психотип как tabula rasa. Это означает, что психоотношения всех психотипов с «пустым» психотипом являются «пустыми» морфизмами. Все же объекты (синглетоны) в этом топосе есть конечными объектами. Такой топос можно назвать нуль-топосом. Отсюда следует, что нуль-категория является подкатегорией нуль-топоса.

3. Расплывчатая нуль-категория как недетерминированная модель социона. Из практики тестирования известно, что тестирование на базе разработанных тестов, а также интуитивное тестирование, базирующееся на определенном опыте и природном чутье, как правило, не есть однозначным. Существуют индивиды (а также этносы), психологические (или интегральные) типы которых разными «тестировщиками» определяются и идентифицируются по-разному. Для устранения такого «разнобоя» соционики предлагают различные рецепты. Одним из таких рецептов есть введение В. Гуленко подтипов для каждого типа. Другой подход — это увеличение количества психоинформационных типов до 24-х или до 32-х. Ниже мы предлагаем модель социона, в которой бы учитывалась как неточность тестирования и существование подтипов, так и отсутствие в реальности абсолютно точных ТІМов. Итак, мы исходим из того, что в индивиде развиты до некоторого уровня все психические функции и практически не существует индивида, который точно (идеально) соответствует определенному типу [4]. Кроме того, мы считаем, что возможно построение расплывчатого (нечеткого) (fuzzy) портрета индивида как определенного набора чисел, которые соответствуют уровню приближения его к тому или иному выделенному чистому типу [4].

Известно, что расплывчатость (нечеткость) может быть обусловлена природой вещей, возможной степенью точности рассмотрений, а также может вызываться неполнотой информации, которая необходима для анализа.

Расплывчатое множество — это отображение $f : M \to [0,1]$, где $[0,1]$ — отрезок действительной прямой, а M — обычное (четкое) множество — объект категории Set. В действительности здесь речь идет о расплывчатом подмножестве четкого множества. Функция f определяет степень принадлежности элемента из M данному расплывчатому множеству. Эта степень принадлежности может также трактоваться как мера истинности утверждения о том, что данный элемент принадлежит подмножеству.

В нашем случае под четким множеством психотипа мы понимаем множество I всех индивидов (объектов, субъектов), которые имеют данный чистый тип. Под расплывчатым подтипом (или просто подтипом) данного типа мы будем понимать расплывчатое подмножество множества I с заданными функциями принадлежности f.

Таким образом, объектами нашей расплывчатой нуль-категории есть все расплывчатые подтипы всех чистых типов. Для каждого четкого типа всех расплывчатых подтипов может быть довольно много, если учитывать численные значения функций принадлежности данного подтипа всех 16-ти четких ТИМов.

Для полного и корректного определения расплывчатой нуль-категории введем определение классификатора подобъектов Ω [5].

Объект Ω в категории K со стрелкой-морфизмом $\mathrm{true}:1 \to \Omega$, где 1 — терминальный (конечный) объект, называется классификатором подобъектов в K, если выполняется следующее условие — Ω-аксиома: для каждого мономорфизма $f : A \to D$ существует одна и только одна стрелка $\chi_f : D \to \Omega$, для которой диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & D \\ I_A \downarrow & & \downarrow \chi_f \\ 1 & \xrightarrow{\mathrm{true}} & \Omega \end{array}$$

является декартовым квадратом.

Здесь $I_A \equiv ! : A \to 1$ единственная стрелка из A в 1. Кроме того, $1 = \{\varnothing\}$ для категории Set. Стрелка χ_f называется характеристической стрелкой мономорфизма f.

Для определения единичного морфизма ε_A для объекта A в расплывчатой нуль-категории нужно определить алгебру Гейтинга [5].

4. Теоретико-категорная и теоретико-множественная интерпретация решетки. Для понимания принципов построения алгебры Гейтинга рассмотрим понятия предпорядка и категории предпорядка. В общем случае категория, в которой любые два объекта p и q

связаны не более чем одной стрелкой $p \to q$, называется категорией предпорядка. Если P — совокупность объектов категории предпорядка, то на ней определено следующее бинарное отношение R (т. е. множество $R \subseteq P \times P$): $< p,q > \in R$ тогда и только тогда, когда в данной категории существует стрелка $p \to q$.

Отношение R имеет следующие свойства (мы обозначаем pRq вместо $< p,q > \in R$):

1) рефлексивность, т. е. для каждого p имеет место pRp;

2) транзитивность, т. е. если pRq и qRs, то pRs.

Транзитивное и рефлексивное бинарное отношение называют отношением предпорядка (или квазипорядка). Таким образом, категория предпорядка определяет естественное отношение предпорядка на совокупности своих объектов (отсюда и ее название).

Рассматриваются также категории предпорядка, отношение предпорядка на которых удовлетворяет следующее дополнительное услоовие:

3) антисимметричность, т. е. если pRq и qRp, то $p = q$.

Антисимметричное отношение предпорядка называют отношением частичного порядка (или нестрогого порядка). Это отношение часто обозначается через $\sqsubseteq$, т. е. пишется $p \sqsubseteq q$ вместо pRq. По определению частично упорядоченным множеством (ч. у. множеством) есть пара $\vec{P} = < P, \sqsubseteq >$, состоящая из множества P и отношения частичного порядка $\sqsubseteq$ на P. Эта структура играет центральную роль в изучении топосов.

В категории предпорядка, которая соответствует предупорядоченному множеству $(P, \sqsubseteq)$, начальный объект — это элемент $0 \in P$, удовлетворяющий условию $0 \sqsubseteq p$ для всех $p \in P$ (т. е. наименьший элемент). В ч. у. множестве, где «изоморфно» означает «равно», может быть наибольше один начальный объект (минимум или нулевой элемент). Кроме того, в категории предпорядка конечный объект удовлетворяет условию $p \sqsubseteq 1$ для всех p, то есть является наибольшим элементом. В ч. у. множестве объект 1 единственен (максимум), если он существует, и называется также единицей категории $\vec{P}$.

В категории предпорядка $(P, \sqsubseteq)$ произведение двух элементов p и q, если оно существует, определяется следующими свойствами:

1) $p \times q \sqsubseteq p, p \times q \sqsubseteq q$, т. е. $p \times q$ есть нижняя грань для p и q;

2) если $c \sqsubseteq p, c \sqsubseteq q$, то $c \sqsubseteq p \times q$, т. е. $p \times q$ больше любой другой нижней грани для p и q.

Таким образом, $p \times q$ — это наибольшая нижняя грань (н. н. г.) для p и q. В случае, когда отношение $\sqsubseteq$ является отношением частичного порядка, соответствующая категория предпорядка скелетальна. Поэтому н. н. г. единственна. Она будет обозначаться через $p \sqcap q$. Ч. у. множество, в котором любые два элемента имеют н. н. г., называется нижней полурешеткой. В категорных терминах нижняя полурешетка — это скелетальная категория предпорядка, в которой существует произведение любых двух ее объектов. Отметим, что здесь под скелетальной понимается категория, в которой «изоморфный» означает то же самое, что и «равный», т. е. каждый раз как $a \simeq b$, будет $a = b$.

В категории предпорядка $(P, \sqsubseteq)$ копроизведение $p + q$ определяется свойствами:

1) $p \sqsubseteq p + q, q \sqsubseteq p + q$, т. е. $p + q$ — верхняя грань для p и q;

2) если $p \sqsubseteq c$ и $q \sqsubseteq c$, то $p + q \sqsubseteq c$, т. е. $p + q$ меньшая, чем любая другая верхняя грань для p и q.

Таким образом, $p + q$ — наименьшая верхняя грань (н. в. г.) для p и q. В ч. у. множестве н. в. г. единственна в случае, когда она существует. Она обозначается через $p \sqcup q$. Ч. у. множество, в котором для любых двух элементов существуют н. в. г. и н. н. г., называется решеткой. В категорных терминах решетка — это скелетальная категория предпорядка, в которой существует произведение и копроизведение любых двух ее объектов [6].

5. Булева алгебра как решетка. Дадим определение булевой алгебры, существенно используя понятие решетки. Это стоит сделать, поскольку алгебра Гейтинга есть определенным обобщением булевой алгебры и некоторые авторы используют для нее название псевдобулева алгебра [6-7].

Как следует из предыдущего, решетка — это частично упорядоченное множество $\mathbf{P}=(P,\sqsubseteq)$, в котором для любых двух элементов $x,y\in P$ существует наибольшая нижняя грань (н. н. г.) $x\sqcap y$ и наименьшая верхняя грань (н. в. г.) $x\sqcup y$. Н. н. г. $x\sqcap y$ называют также пересечением элементов x и y, а н. в. г. $x\sqcup y$ — объединением элементов x и y. Как отмечалось выше, если ч. у. множество $\mathbf{P}$ рассматривать как категорию, то пересечения преобразуются в произведения, а объединения — в копроизведения.

Напомним также, что элемент 0, для которого $0\sqsubseteq x$ при всех $x\in P$, называют нулем (минимумом) решетки, а элемент 1 с $x\sqsubseteq 1$ при всех $x\in P$ — единицей (максимумом). Решетку называют ограниченной, если она имеет единицу и нуль. С категорной точки зрения 0 — начальный объект, а 1 — конечный. Поэтому ограниченная решетка по сути есть конечно биполной скелетальной категорией предпорядка.

Решетка называется дистрибутивной, если выполнены следующие законы (каждый из которых следует из другого в любой решетке):

$$\begin{aligned} x\sqcap(y\sqcup z)&=(x\sqcap y)\sqcup(x\sqcap z),\\ x\sqcup(y\sqcap z)&=(x\sqcup y)\sqcap(x\sqcup z)\end{aligned}\quad \text{для всех } x,y,z.$$

Для завершения описания булевых алгебр необходимо ввести еще одно понятие, а именно, понятие дополнения в решетке. Элемент из ограниченной решетки называется дополнением элемента x, если

$$x\sqcup y=1 \text{ и } x\sqcap y=0.$$

Решетка называется решеткой с дополнениями, если каждый ее элемент имеет в ней дополнение.

Булева алгебра (БА) определяется как дистрибутивная решетка с дополнениями. Пусть $\mathbf{B}=(B,\sqsubseteq)$ — некоторая булева алгебра. Тогда легко показать, что каждый элемент $x\in B$ имеет ровно одно дополнение x'. В любой булевой алгебре: 1) $(x')'=x$; 2) $x\sqcap y=0$ т. и т. т., когда $y\sqsubseteq x'$; 3) $x\sqsubseteq y$ т. и т. т., когда $y'\sqsubseteq x'$; 4) $(x\sqcap y)'=x'\sqcup y'$; 5) $(x\sqcup y)'=x'\sqcap y'$.

В каждой булевой алгебре $\mathbf{B}=(B,\sqsubseteq)$ имеют место операции $\sqcap$ (пересечение), $\sqcup$ (объединение) и $'$ (дополнение), отвечающие истинностным функциям конъюнкции $\wedge$, дизъюнкции $\vee$ и отрицания $\sim$ и имеющие следующий вид и истинностные таблицы: $\cap: 2\times 2\to 2$ с $1\cap 1=1, 1\cap 0=0\cap 1=0\cap 0=0$ (истинностная функция конъюнкции $\wedge$), где $2=\{0,1\}$, $\cup: 2\times 2\to 2$ с $1\cup 1=1\cup 0=0\cup 1=1; 0\cup 0=0$ (истинностная функция дизъюнкции $\vee$) и $\neg: 2\to 2$ с $\neg 1=0$ и $\neg 0=1$ (истинностная функция отрицания $\sim$). В булевой алгебре имеет место также операция, соответствующая импликации. Истинностная функция импликации $\alpha\supset\beta$ имеет вид $\Rightarrow: 2\times 2=2$ с $1\Rightarrow 0=0$, $1\Rightarrow 1=0\Rightarrow 1=0\Rightarrow 0=1$ и совпадает с истинностной функцией для $\sim\alpha\vee\beta$, где $\sim$ — отрицание. Итак, для элементов $x,y\in B$ можно определить: $x\Rightarrow y=x'\sqcup y$.

Здесь стоит заметить, что когда имеем кольцо с операциями $\oplus$ и $\cdot$ и с единичным элементом 1, в котором каждый элемент идемпотентен, т. е. $x\cdot x=x$ для всех x, и кроме того, каждый элемент обратный себе относительно операции сложения $\oplus$, т. е. $x\oplus x=0$ (алгебра Жегалкина), то, определяя операции $\wedge$ и $\vee$

$$\begin{aligned} x\wedge y&=x\cdot y,\\ x\vee y&=x\oplus y\oplus x\wedge y\end{aligned}$$

и введя дополнение

$$x'=1\oplus x,$$

мы получим булеву решетку.

6. Алгебра Гейтинга как решетка. Для определения алгебр Гейтинга необходимо расширить понятие наименьшей верхней грани с пары элементов на множество элементов.

Пусть A — подмножество решетки $\mathbf{L}=(L,\sqsubseteq)$. Тогда элемент $x\in L$ называется верхней гранью для A и обозначается $A\sqsubseteq x$, если $y\sqsubseteq x$ для всех $y\in A$. Более того, если $x\sqsubseteq z$ для всякого $A\sqsubseteq z$, то x называется наименьшей верхней гранью (н. в. г.) подмножества A.

В решетке $\mathscr{P}(D,\subseteq)$, где $\mathscr{P}(D)$ — множество-степень множества D, или множество всех подмножеств множества D, подмножество ^{-}A есть наибольшим элементом, которое не пересекает A. Это означает, что ^{-}A не пересекает A, т. е. $A\bigcap{}^{-}A=\varnothing$, и если $A\bigcap B=\varnothing$, то $B\subseteq{}^{-}A$. Это описание дополнения, которое имеет место для любой решетки, и иногда оно ведет к небулевой операции. Поэтому мы дадим вводимому ниже понятию несколько другое название.

Если $\mathbf{L}=(L,\sqsubseteq)$ — решетка с нулем, а $a\in L$ — некоторый ее элемент, то элемент $b\in L$ называется псевдодополнением для a в том случае, когда b — наибольший элемент в L, который не пересекается с a, т. е. b — наибольший элемент множества $\{x\in L: a\sqcap x=0\}$. Если каждый элемент в L имеет псевдодополнения, то решетка $\mathbf{L}$ называется решеткой с псевдодополнениями.

Понятие псевдодополнения можно обобщить, заменив нуль 0 некоторым другим элементом нашей решетки, что ведет к понятию псевдодополнения до a относительно b. Это наибольший элемент, если такой существует, множества $\{x: a\sqcap x\sqsubseteq b\}$. Иначе говоря, псевдодополнение до a относительно b есть наибольшим таким элементом c, что $a\sqcap c\sqsubseteq b$.

В решетке $\mathbf{L}$ общего вида через $a\Rightarrow b$ мы обозначим псевдодополнение до a относительно b, если оно существует. Если $a\Rightarrow b$ существует для любых элементов a и b с $\mathbf{L}$, то мы говорим, что решетка $\mathbf{L}$ — решетка с относительными псевдодополнениями (о. п. д.). Таким образом, определение решетки с о. п. д. не требует наличия нуля.

Алгебра Гейтинга является решеткой с о. п. д., которая имеет нуль 0. Если $\mathbf{H}=(H,\sqsubseteq)$ — алгебра Гейтинга, то в ней определена операция $\neg: H\rightarrow H$ с $\neg a=a\Rightarrow 0$. Тогда $\neg a$ есть н. в. г. множества $\{x: a\sqcap x=0\}$, т. е. $\neg a$ является псевдодополнением до a.

7. Алгебра Гейтинга $=$ псевдобулевая алгебра. Алгебру Гейтинга как псевдобулеву алгебру можно охарактеризовать простой системой аксиом [7]. Универсальная алгебра

$$\mathbf{A}=\{A,\bigcup,\bigcap,\Rightarrow,^{-}\}$$

с тремя бинарными операциями $\bigcup,\bigcap,\Rightarrow$ и одной унарной операцией является псевдобулевой алгеброй тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим аксиомам:

$$a\bigcup b=b\bigcup a, a\bigcap b=b\bigcap a, \qquad (I_1)$$

$$a\bigcup(b\bigcup c)=(a\bigcup b)\bigcup c, a\bigcap(b\bigcap c)=(a\bigcap b)\bigcap c, \qquad (I_2)$$

$$(a\bigcap b)\bigcup b=b, a\bigcap(a\bigcup b)=a, \qquad (I_3)$$

$$a\bigcap(a\Rightarrow b)=a\bigcap b, \qquad (I_7)$$

$$(a\Rightarrow b)\bigcap b=b, \qquad (I_8)$$

$$(a\Rightarrow b)\bigcap(a\Rightarrow c)=a\Rightarrow(b\bigcap c), \qquad (I_9)$$

$$(a\Rightarrow a)\bigcap b=b, \qquad (I_{10})$$

$$^{-}(a\Rightarrow a)\bigcup b=b, \qquad (I_{11})$$

$$a\Rightarrow(^{-}(a\Rightarrow a))={}^{-}a. \qquad (I_{12})$$

Тождества (I_1) называются законами коммутативности, (I_2) — ассоциативности, (I_3) — поглощения.

Универсальная алгебра $\mathbf{A}=\{A,\bigcup,\bigcap\}$, удовлетворяющая тождествам $(I_1)-(I_3)$ как аксиомам, называется решеткой.

Решетка $\mathbf{A}$ называется дистрибутивной, если для любых $a,b,c\in A$ выполняется аксиома

$$a\bigcap(b\bigcup c)=(a\bigcap b)\bigcup(a\bigcap c), \quad a\bigcup(b\bigcap c)=(a\bigcup b)\bigcap(a\bigcup c). \qquad (I_4)$$

Законы (I_4) называются законами дистрибутивности.

Универсальная алгебра $\mathbf{A}=\{A,\bigcup,\bigcap,^{-}\}$ с двумя бинарными операциями и одной унарной операцией $^{-}$, которые удовлетворяют аксиомам $(I_1)-(I_4)$ и аксиоме

$$(a\bigcap{}^{-}a)\bigcup b=b, (a\bigcup{}^{-}a)\bigcap b=b, \qquad (I_5)$$

называется булевой алгеброй.

Итак, решетка $\mathbf{A}$ называется булевой алгеброй, если она дистрибутивна и каждый элемент $a \in A$ имеет дополнение $-a$. Очевидно, что в булевой алгебре есть нулевой Δ и единичный $\vee$ элементы.

В [7] доказываются два следующих утверждения. Первое устанавливает, что любая булева алгебра является псевдобулевой алгеброй. Для любых $a, b \in A$ элемент $a \Rightarrow b$ есть дополнением элемента a относительно b и

$$a \Rightarrow b = -a \cup b. \qquad (I_6)$$

Кроме того, $-a = a \Rightarrow \Delta$. Для всех элементов $a, b \in A$ существует разность $b - a$ и $b - a = b \cap -a$.

Другое утверждает, что когда $\mathbf{A}$ — псевдобулева алгебра и при всех $a \in A$ псевдодополнение $-a$ есть дополнением элемента a, то $\mathbf{A}$ — булева алгебра.

Возвратимся теперь снова к решетке. Решетка $\mathbf{A}$ называется импликативной, если $a \Rightarrow b$ существует для всех элементов $a, b \in A$. Каждая импликативная решетка имеет единичный элемент. Однако она, вообще говоря, не имеет нулевого элемента. Каждая импликативная решетка с нулевым элементом называется псевдобулевой алгеброй.

Основное свойство операции $\Rightarrow$ в импликативной решетке записывается так:

$c \leq a \Rightarrow b$ тогда и только тогда, когда $a \cap c \leq b$.

Если $\mathbf{A}$ — псевдобулева алгебра, то $-a$ существует для каждого $a \in A$, а именно $-a = a \Rightarrow \Delta$.

Очевидно, что каждая импликативная решетка может рассматриваться как алгебра

$$\mathbf{A} = \{A, \cup, \cap, \Rightarrow\}$$

с тремя бинарными операциями. Аналогично, каждая псевдобулева алгебра $\mathbf{A}$ может рассматриваться как алгебра

$$\mathbf{A} = \{A, \cup, \cap, \Rightarrow, -\}$$

с тремя бинарными операциями $\cup, \cap, \Rightarrow$ и одной унарной операцией $-$.

8. Булев топос. Топос $\mathcal{E}$ называется булевым, если для каждого $\mathcal{E}$-объекта d решетка $(\mathrm{Sub}(d), \subseteq)$ является булевой алгеброй.

Здесь $\mathcal{E}$ — топос и d — его подобъект. На совокупности $\mathrm{Sub}(d)$ всех подобъектов объекта d определяются операции дополнения, пересечения и объединения. С другой стороны, частично упорядоченное множество $(\mathrm{Sub}(d), \subseteq)$ является решеткой, в которой

(1) $f \cap g$ — наибольшая нижняя грань (решетчатое пересечение) объектов f и g;

(2) $f \cup g$ — наименьшая верхняя грань (решетчатое объединение) объектов f и g.

В книге [6] доказывается следующая теорема.

<u>*Теорема.*</u> Для любого топоса $\mathcal{E}$ следующие утверждения эквивалентны:

(1) $\mathcal{E}$ булев;

(2) $\mathrm{Sub}(\Omega)$ является булевой алгеброй;

(3) $\top : 1 \to \Omega$ имеет дополнение в $\mathrm{Sub}(\Omega)$;

(4) $\perp : 1 \to \Omega$ есть дополнение для $\top$ в $\mathrm{Sub}(\Omega)$;

(5) $\top \cup \perp \simeq 1_\Omega$ в $\mathrm{Sub}(\Omega)$;

(6) $\mathcal{E}$ — классический топос, т. е. стрелка $[\top, \perp] : 1 + 1 \to \Omega$ есть изострелкой;

(7) $i_1 : 1 \to 1 + 1$ является классификатором подобъектов.

Напомним определения некоторых понятий, использованных при формулировке этой теоремы. Как мы уже отметили выше, объект Ω в категории $\mathcal{E}$ со стрелкой-морфизмом $\top \equiv \mathrm{true} : 1 \to \Omega$, где 1 — конечный объект, называется классификатором подобъектов в $\mathcal{E}$, если используется Ω-аксиома: для каждого мономорфизма (стрелка $f : a \to b$ называется мономорфизмом, если для любой пары $g, h : c \rightarrowtail a$ стрелок из равенства $f \circ g = f \circ h$ следует $g = h$) $f : A \to D$ существует одна и только одна стрелка $\chi_f : D \to \Omega$, для которой имеет место равенство $\chi_f \circ f = \top \circ I_A$.

Известно, что в Set существует ровно две стрелки из $1 = \{\varnothing\}$ в $\Omega = \{\varnothing, 1\}$. Одна — это отображение true такое, что $\mathrm{true}(\varnothing) = 1$. Другая, которая обозначается через false, определяется равенством $\mathrm{false}(\varnothing) = \varnothing$. Это отображение с областью значений Ω является характеристической функцией пустого множества $\varnothing = \{x : \mathrm{false}(x) = 1\}$. Таким образом, в Set имеем декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \varnothing & \overset{!}{\to} & 1 \\ !\downarrow & & \downarrow \mathrm{false} \\ 1 & \overset{\mathrm{true}}{\to} & \Omega \end{array}$$

Исходя из этого, определим в произвольном топосе $\mathcal{E}$ стрелку $\mathrm{false} : 1 \to \Omega$ как единственную $\mathcal{E}$-стрелку, для которой квадрат

$$\begin{array}{ccc} 0 & \overset{0_1}{\to} & 1 \\ !\downarrow & & \downarrow \mathrm{false} \\ 1 & \overset{\top}{\to} & \Omega \end{array}$$

декартов. Таким образом, $\mathrm{false} = \chi_{0_1}$ — характеристическая стрелка подобъекта $0_1 : 0 \to 1$. Кроме того,

$$\bot \equiv \mathrm{false} : 1 \to \Omega .$$

Изоморфизм $\simeq$ в (5) следует из того, что $\bot$ и $\top$ взаимно дополнительны (ибо в булевой алгебре $a \cup {}^{-}a = 1$).

В предыдущей теореме $[\top, \bot]$ означает копроизведение стрелок, а $1+1$ — копроизведение объектов. Кроме того, i_1 — это стрелка-инъекция в первое слагаемое копроизведения объектов.

По нашему мнению, можно доказать, что социон, объекты и морфизмы которого представляются в виде бинарных тетрад, является булевым топосом.

9. Гейтингозначные Ω-множества и топос $\Omega - \mathrm{Set}$. Можно рассматривать объект в топосе как «множественноподобное» образование, которое имеет потенциально существующие (частично определенные) элементы, и лишь некоторые из них актуально существуют (всюду определены). В «логике частичных элементов» рассматриваются две концепции одинаковости (равенства). Выражение $\exists v(v \approx c)$, которое равносильно утверждению о существовании элемента c, говорит, что имеется актуально существующий элемент, который равен c, т. е.

$$\text{(i)}\ \mathbf{E}(c) \equiv \exists v(v \approx c) .$$

Здесь $\mathbf{E}$ — предикат (не квантор) существования (выражение $\mathbf{E}(t)$ читается «t существует»), символ $\equiv$ — это связка равносильности, которая читается как «если и только если». Выражение $\varphi \equiv \psi$ вводится формально как сокращение формулы $(\varphi \supset \psi) \wedge (\psi \supset \varphi)$.

В (i) мы неявно использовали принцип, в соответствии с которым что-то, что равно существующей вещи, само должно существовать. Сильнее, однако, требовать, чтобы элементы могли быть равными только тогда, когда они существуют. Таким образом, из равенства элементов следует их существование, т. е.

$$\text{(ii)}\ v \approx w \supset \mathbf{E}(v) \wedge \mathbf{E}(w) .$$

Другое понятие одинаковости (равенства), для которого используется символ $\approxeq$, является более слабым понятием эквивалентности, которое не дифференцирует (не делит) элементы по статусу их существования. Так, v и w будут эквивалентными, если либо ни один из них не существует, либо они оба существуют и равны $(\approx)$. Это можно выразить в следующей (позитивной) форме: если один из них существует, то они равны и, следовательно, другой существует. Таким образом, эквивалентность (слабая) определяется следующим образом:

$$\text{(iii)}\ (v \approxeq w) \equiv (\mathbf{E}(v) \vee \mathbf{E}(w) \supset v \approx w) .$$

Отметим, что в работе [6] выражение $f \approx g$ понимается как его истинностное значение или как мера степени равенства f и g .

Этот анализ ведет нас к обобщению понятия множества как совокупности (частичных) элементов с мерой степени равенства между ними, принимающей значения в некоторой алгебре Гейтинга. Это понятие допускает следующее абстрактное аксиоматическое описание.

Пусть $(\Omega,\sqsubseteq)$ — полная алгебра Гейтинга, т. е. такая алгебра, в которой каждое подмножество $A\subseteq\Omega$ имеет наименьшую верхнюю грань $\sqcup A$ и наибольшую нижнюю грань $\sqcap A$. Ω-значным множеством (Ω-множеством) называется пара $\mathbf{A}$, состоящая из множества A и такой функции $A\times A\to\Omega$, которая называется Ω-равенством и которая сопоставляет каждой упорядоченной паре $<x,y>$ элементов из A элемент $[\![x\approx y]\!]_A$ из Ω так, что для всех $x,y,z\in A$

$$[\![x\approx y]\!]_A\sqsubseteq[\![y\approx x]\!]_A \text{ и } [\![x\approx y]\!]_A\sqcap[\![y\approx z]\!]_A\sqsubseteq[\![x\approx z]\!]_A .$$

Последние два условия определяют Ω-истинность формул

$$(x\approx y)\supset(y\approx x),\ (x\approx y)\wedge(y\approx z)\supset(x\approx z),$$

выражающих симметричность и транзитивность отношения равенства. Элемент $[\![x\approx x]\!]_A$ также обозначается через $[\![E(x)]\!]_A$. Дадим следующее определение:

$$[\![x\approxeq y]\!]_A=([\![Ex]\!]_A\sqcup[\![Ey]\!]_A)\Rightarrow[\![x\approx y]\!]_A .$$

Оправданием использования символа классифицирующего объекта для обозначения полной алгебры Гейтинга служит тот факт, что в категории $\Omega-\mathrm{Set}$ Ω-множеств, являющейся топосом, сама алгебра Ω представляет собой объект истинностных значений [6]. Точнее, этот объект представляет собой Ω-множество Ω, получающееся определением функции $\Omega\times\Omega\to\Omega$ при помощи равенства

$$[\![p\approx q]\!]_\Omega=p\Leftrightarrow q ,$$

где $p,q\in\Omega$ и

$$(p\Leftrightarrow q)=(p\Rightarrow q)\sqcap(q\Rightarrow p).$$

Операция $\Leftrightarrow$ — это интерпретация связки равносильности $\equiv$. Поскольку элементы из Ω служат истинностными значениями, то будем использовать символы $\perp$ и $\top$ для обозначения наименьшего (нуль) и наибольшего (единица) элементов из Ω соответственно.

Стрелку из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$ можно представить себе в первом приближении как функцию $f:A\to B$. Ее график был бы тогда некоторым подмножеством в $A\times B$ и должен был бы соответствовать функции вида $A\times B\to\Omega$. Эту функцию будем понимать как отображение, ставящее в соответствие паре $<x,y>$ истинностное значение $[\![f(x)\approx y]\!]$, представляющее собой степень равенства $f(x)$ и y, т. е. меру области, на которой y есть f-образ x. Имея это в виду, перейдем к формальному определению.

Стрелкой из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$ в категории $\Omega-\mathrm{Set}$ называется функция $f:A\times B\to\Omega$, удовлетворяющая условиям:

(iv) $[\![x\approx x']\!]_{\mathbf{A}}\sqcap f(<x,y>)\sqsubseteq f(<x',y>)$,

(v) $f(<x,y>)\sqcap[\![y\approx y']\!]_{\mathbf{B}}\sqsubseteq f(<x,y'>)$,

(vi) $f(<x,y>)\sqcap f(<x,y'>)\sqsubseteq[\![y\approx y']\!]_{\mathbf{B}}$,

(vii) $[\![x\approx x]\!]_{\mathbf{A}}=\sqcup\{f(<x,y>):y\in B\}$.

Первые два условия представляют собой аксиомы равенств (аксиомы неразличимости равных элементов). Они утверждают Ω-истинность формул

$$(x\approx x')\wedge(f(x)\approx y)\supset(f(x')\approx y),$$
$$(f(x)\approx y)\wedge(y\approx y')\supset(f(x)\approx y').$$

Условие (vi) выражает Ω-истинность свойства однозначности стрелки f, которую можно сформулировать так: каждый из частичных элементов y и y' является f-образом элемента x только в области, на которой эти элементы равны.

Условие (vii) обеспечивает Ω-истинность утверждения, что каждый $x\in A$ имеет некоторый f-образ $y\in B$, т. е. f — всюду определенная функция. Условие (vii) можно прочитать следующим образом: каждый элемент из $\mathbf{A}$ существует на той области, на которой он имеет образ в $\mathbf{B}$.

Таким образом, стрелка из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$, представленная своим графиком, является экстенсионным (неразличимым при помощи равенств) функциональным всюду определенным

Ω-значным отношением из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$. Из этого определения следует, что отношение равенства $\approx$ на $\mathbf{A}$ имеет перечисленные свойства, т. е. функция $<x,y>\to[\![x\approx y]\!]_{\mathbf{A}}$ есть стрелка $\mathbf{A}\to\mathbf{A}$ в соответствии с условиями (iv)-(vii). В действительности она будет единичной стрелкой. Истинностное значение формулы $\mathrm{id}(x)=y$ совпадает тогда с истинностным значением формулы $x=y$, как и должно быть для тождественной функции.

Композицией стрелок $f:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ и $g:\mathbf{B}\to\mathbf{C}$ есть функция $g\circ f:A\times C\to\Omega$, которая определяется равенством

$$g\circ f(<x,z>)=\bigsqcup_{y\in B}(f(<x,y>)\sqcap g(<y,z>)).$$

Тем самим категория $\Omega-\mathbf{Set}$ описана полностью. Перейдем теперь к выяснению ее топосной структуры. Для стрелки $f:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ обозначение $f(<x,y>)$ и $[\![f(x)\approx y]\!]$ будем использовать как синонимы.

Конечный объект. $\Omega-$множество, состоящее из одноэлементного множества $\{0\}$ и функции $[\![\cdot\approx\cdot]\!]$, определяемой условием $[\![0\approx 0]\!]=\top$, является конечным объектом $\mathbf{1}$ категории $\Omega-\mathbf{Set}$. Единственная стрелка дается равенством

$$[\![f(x)\approx 0]\!]=[\![Ex]\!],$$

которое утверждает, что $f(x)$ равна 0 в области, на которой x существует.

Произведения. Произведение $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ состоит из произведения множеств $A\times B$ с Ω-равенством

$$[\![<x,y>\approx<x',y'>]\!]=[\![x\approx x']\!]_A\sqcap[\![y\approx y']\!]_B.$$

Стрелка проектирования $pr_{\mathbf{A}}:\mathbf{A}\times\mathbf{B}\to\mathbf{A}$ определяется формулой

$$[\![pr_A(<x,y>)\approx z]\!]=[\![x\approx z]\!]\sqcap[\![E(x)]\!]\sqcap[\![E(y)]\!]$$

и имеет следующий смысл: $\mathbf{A}$-проекция пары $<x,y>$ равна z в такой же степени, в какой x и y существуют и x равно z.

Подобъекты. Интуитивно произвольное подмножество в $\mathbf{A}$ может быть представлено функцией вида $s:A\to\Omega$. Такая функция ставит в соответствие каждому $x\in A$ некоторый элемент $s(x)$ из Ω, который мы рассматриваем как истинностное значение выражения $x\in s$ или как меру принадлежности x «множеству s». Поэтому мы обозначаем $s(x)$ также через $[\![x\in s]\!]$. Формально подмножеством Ω-множества $\mathbf{A}$ называется функция $s:A\to\Omega$, удовлетворяющая условиям:

(viii) $[\![x\in s]\!]\sqcap[\![x\approx y]\!]\sqsubseteq[\![y\in s]\!]$ (экстенсиональность)

(ix) $[\![x\in s]\!]\sqsubseteq[\![Ex]\!]$ (корректность).

Можно показать, что стрелка $f:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ является мономорфной тогда и только тогда, когда для любых $x,y\in A$ и $z\in B$

$$[\![f(x)\approx z]\!]\sqcap[\![f(y)\approx z]\!]\sqsubseteq[\![x\approx y]\!].$$

Такой стрелке соответствует подмножество Ω-множества $\mathbf{B}$ (f-образ $\mathbf{A}$), т. е. функция $s_f:B\to\Omega$, которая определяется так:

$$s_f(y)=\bigsqcup_{x\in A}[\![f(x)\approx y]\!],$$

т. е. y принадлежит s_f на такой области, на которой он является f–образом некоторого $x\in A$. Таким образом, $s_f(y)$ есть истинностное значение выражения «$y\in f(A)$». И наоборот, подмножество $s:B\to\Omega$ Ω-множества B определяет monoстрелку $f_s:\mathbf{A}_s\to\mathbf{B}$ [6].

Классификатор подобъектов. Определим стрелку $\mathrm{true}:\mathbf{1}\to\Omega$

$$[\![\mathrm{true}(0)\approx p]\!]=[\![p\approx\top]\!]_\Omega$$

(p есть true на области, на которой p равно $\top$). Таким образом,

$$[\![\mathrm{true}(0)\approx \mathrm{p}]\!]=(p\Leftrightarrow\top)=p.$$

Пусть $f:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ — произвольная monoстрелка и $s:\mathbf{D}\to\Omega$– соответствующее ей подмножество Ω–множества $\mathbf{D}$. Характеристическая стрелка $\chi_f(d):\mathbf{D}\to\Omega$ определяется соотношением

$$[\![\chi_f(d)\approx p]\!]=[\![Ed]\!]_{\mathbf{D}}\sqcap[\![s_f(d)\approx p]\!]_\Omega,$$

т. е. $\chi_f(d)$ равно p в такой же степени, в какой d существует, и p является истинностным значением выражения $d \in f(A)$

Объект частичных элементов. В категории Set синглетон — это множество, содержащее ровно один элемент. При рассмотрении множества частичных элементов интереснее множества, содержащие не более одного элемента. Формально подмножество Ω-множества $\mathbf{A}$ (т. е. экстенсиональная и корректная функция) $s: A \to \Omega$ называется синглетоном, если она удовлетворяет условию

$$[\![x \in s]\!] \sqcap [\![y \in s]\!] \sqsubseteq [\![x \approx y]\!],$$

т. е. элементы из A принадлежат s только на области, на которой они равны.

Объект $\tilde{\mathbf{A}}$ определим как Ω-множество всех подмножеств множества $\mathbf{A}$, являющегося синглетоном. Поскольку объект $\tilde{\mathbf{A}}$ сам является подобъектом в $P(\mathbf{A})$, то ему соответствует функция $\text{sing}: S(\mathbf{A}) \to \Omega$. Точное значение этой функции такое:

$$[\![s \in \text{sing}]\!] = \sqcap_{x,y \in A} ([\![x \in s]\!] \sqcap [\![y \in s]\!] \Rightarrow [\![x \approx y]\!]),$$

где $s \in S(\mathbf{A})$ (сравните с выражением «для всех $x, y \in A$ из того, что x и y принадлежат s, следует $x = y$ «). Стрелка включения $\eta_{\mathbf{A}}: \mathbf{A} \to \tilde{\mathbf{A}}$ объекта $\mathbf{A}$ в $\tilde{\mathbf{A}}$ определяется равенством

$$[\![\eta_{\mathbf{A}}(a) \approx s]\!] = [\![Ea]\!]_{\mathbf{A}} \sqcap [\![s \approx \{\mathbf{a}\}]\!]_{P(\mathbf{A})}$$

($\eta_{\mathbf{A}}(a) \in s$ в той же степени, в какой a существует и s равно $\{\mathbf{a}\}$).

10. Категория расплывчатых множеств как топос: основные свойства. Алгебра Гейтинга — это дистрибутивная решетка с нулем и единицей, имеющая относительные псевдодополнения.

В терминах алгебраических операций алгебра Гейтинга имеет нульарные операции, выделяющие нуль и единицу, операции сложения и умножения и еще одну операцию, которая сопоставляет паре элементов a и b элемент $a \to b$. Унарная операция $\bar{a}$ в алгебрах Гейтинга определяется так: $\bar{a} = a \to 0$. При этом имеемо $a\bar{a} = 0$, однако $a + \bar{a}$ необязательно равно единице.

При определении расплывчатого множества мы используем отрезок $[0,1]$, который является полной алгеброй Гейтинга, поскольку точные верхние и точные нижние грани определены на нем для любых его подмножеств. В дальнейшем будем рассматривать общую ситуацию и вместо алгебры $[0,1]$ возьмем произвольную полную алгебру Гейтинга Ω. Соответствующие оценки истинности — это элементы в Ω.

Для определения расплывчатого равенства будем исходить из полной алгебры Гейтинга. Пусть A — некоторое множество — объект в Set. Расплывчатое Ω-равенство в A — это отображение $A \times A \to \Omega$, которое сопоставляет паре элементов x и y из A элемент $[\![x \approx y]\!]$ из Ω, причем для любых x, y, z должны выполняться условия:

$$[\![x \approx y]\!] \le [\![y \approx x]\!] \text{ и } [\![x \approx y]\!] \wedge [\![y \approx z]\!] \le [\![x \approx z]\!].$$

Эти два условия имитируют симметричность и транзитивность равенства.

Расплывчатое множество будем трактовать как множество с заданным на нем расплывчатым равенством элементов. Разплывчатость здесь состоит в том, что элементы из данного A мы можем отождествлять лишь в определенной мере и, в частности, каждый отдельный x из A распознается нами с определенной точностью. Для каждого $x \in A$ обозначим $[\![E(x)]\!] = [\![x \approx x]\!]$. Дается еще следующее определение:

$$[\![x \approxeq y]\!] = [\![E(x)]\!] \vee [\![E(y)]\!] \to [\![x \approx y]\!].$$

Множество A с определенным на нем расплывчатым отношением равенства можно, очевидно, трактовать как расплывчатое фактор-множество. Расплывчатое равенство — это то же самое, что и расплывчатая эквивалентность, по которой просходит факторизация. Таким образом, расплывчатость экспонируется двумя способами: в виде расплывчатого подмножества четкого множества и в виде расплывчатого фактор-множества четкого множества. Говоря далее о расплывчатом множестве, мы имеем в виду фактор-множество.

В дальнейшем для множеств $A, B, C, \dots$ — соответствующие расплывчатые Ω-множества будем обозначать через $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \dots$. При этом с одним и тем же A связано, вообще говоря, много разных $\mathbb{A}$.

Базисную алгебру Гейтинга Ω мы будем рассматривать как расплывчатое множество с отображением $\Omega \times \Omega \to \Omega$, которое определяется равенством

$$[\![p \approx q]\!] = p \leftrightarrow q,$$

где p и q — элементы из Ω и

$$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p).$$

Непосредственно проверяются следующие равенства:

1. $[\![p \approx q]\!] = 1$ тогда и только тогда, когда $p - q$;
2. $[\![E(p)]\!] = 1$;
3. $[\![p \approx 1]\!] = p$;
4. $[\![p \approx 0]\!] = \overline{p}$.

Кроме того, для любого расплывчатого множества $\mathbb{A}$ и каждого $x \in A$ выполняется $[\![x \approx \overline{x}]\!] = 1$.

Дадим теперь схему построения категории, объектами которой есть расплывчатые множества — Ω-множества. Морфизмы этой категории, вообще говоря, расплывчатые отображения. Итак, если $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — два $\Omega-$множества, то морфизм $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ — это отображение $f : A \times B \to \Omega$ (расплывчатое подмножество в декартовом произведении), которое удовлетворяет следующие условия:

1. $[\![x \approx x']\!] \wedge f(x, y) \le f(x', y)$;
2. $f(x, y) \wedge [\![y \approx y']\!] \le f(x, y')$;
3. $f(x, y) \wedge f(x, y') \le [\![y \approx y']\!]$;
4. $[\![x \approx x]\!] = \bigcup \{ f(x, y), y \in B \}; x, x' \in A; y, y' \in B$.

Смысл этих условий состоит в следующем. Первые два условия означают согласование отображения с равенством элементов, а третье имитирует свойство однозначности отображения. В четвертом условии знак $\bigcup$ обозначает точную верхнюю грань множества элементов, которое стоит под этим знаком. Это условие заменяет требование, чтобы каждый $x \in A$ имел некоторый образ y. Здесь мы используем условие полноты алгебры Ω.

Мы будем использовать обозначение $f(x, y) = [\![f(x) \approx y]\!]$, которым уже указана степень равенства между потенциальными $f(x)$ и y.

Из приведенного выше определения непосредственно следует, что переход $(x, y) \to [\![x \approx y]\!]$, базирующийся на расплывчатом равенстве $\approx$ на A, является одновременно и расплывчатым отображением $\mathbb{A} \to \mathbb{A}$. Ниже приводится определение умножения расплывчатых отображений, и тогда переход, базирующийся на равенстве $\approx$, играет роль единичного морфизма ε_A. При этом мы считаем, что два морфизма $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ и $g : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ совпадают, если совпадают их расплывчатые графики $f : A \times B \to \Omega$ и $g : A \times B \to \Omega$.

Пусть дано стрелки $f : \mathbb{A} \times \mathbb{B}$ и $g : \mathbb{B} \times \mathbb{C}$. Стрелка $g \cdot f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ определяется как функция $gf : A \times C \to \Omega$, которая дается следующим равенством:

$$gf(x, z) = \bigcup_{y \in B} (f(x, y) \wedge g(y, z)), x \in A, y \in B, z \in C.$$

Это равенство заменяет условие: существует y такое, что $f(x) = y$ и $g(y) = z$.

Итак, категория Ω-множеств (расплывчатых множеств) определена и обозначается она через $\Omega - \mathrm{Set}$. Легко видеть, что когда $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ — морфизм в категории $\Omega - \mathrm{Set}$, то действительно выполняется условие $f \varepsilon_A = f$ и $\varepsilon_B f = f$.

В книге [5] предлагается общая схема доказательства того, что $\Omega - \mathrm{Set}$ является топосом. Сделаем некоторые общие замечания.

Прежде всего отметим, что терминальный объект в данной категории есть множество $1 = \{\varnothing\}$ с функцией равенства, определяемой условием $[\![\varnothing \approx \varnothing]\!] = 1 \in \Omega$. Единственная стрелка $f : \mathbb{A} \to 1$ дается равенством

$$[\![f(x) \approx \varnothing]\!] = [\![E(x)]\!], x \in A.$$

Это равенство можно понимать как $f(x)$ есть $\varnothing$ в той мере, в какой x распознано.

Далее, понятие подобъекта в категории $\Omega-\mathrm{Set}$ сопоставляется с понятием расплывчатого подмножества. Доказывается, что стрелка $f:\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ тогда и только тогда является мономорфизмом в категории $\Omega-\mathrm{Set}$, когда для любых $x,y\in A$ и $z\in B$ выпоняется условие

$$[\![f(x)\approx z]\!]\wedge[\![f(y)\approx z]\!]\leq[\![x\approx y]\!].$$

Это вполне естественно, поскольку мономорфизмы определяют подобъекты. Назовем подмножеством (расплывчатым) Ω-множества $\mathbb{A}$ функцию $s:A\to\Omega$ и будем писать $[\![x\in s]\!]=s(x)$. Эта функция также должна быть согласована с равенством в $\mathbb{A}$. Условия согласования имеют вид:

1. $[\![x\in s]\!]\wedge[\![x\approx y]\!]\leq[\![y\in s]\!]$;
2. $[\![x\in s]\!]\leq[\![E(x)]\!]$.

В книге [5] доказывается, что подобъекты Ω-множеств и их подмножества находятся во взаимно однозначном соответствии.

Существенным обстоятельством является то, что в теории расплывчатых топосов расплывчатое равенство не обязательно рефлексивно, т. е. равенство $[\![x\approx x]\!]=1$ может не выполняться.

Можно показать, что все подмножества в $\mathbb{B}$ определяют объект-степень $P(\mathbb{B})$.

Выделяются также подмножества, «которые содержат не более одного элемента». Это такие $s:A\to\Omega$, для которых выполняется

$$s(x)\wedge s(x')\leq[\![x\approx x']\!].$$

Такие s называются синглетонами. Каждая точка $1\to\mathbb{A}$ (расплывчатый элемент) определяет синглетон. Кроме того, если $a\in A$, то имеем синглетон $\hat{a}:A\to\Omega$ по правилу:

$$\hat{a}(x)=[\![x\approx a]\!]\text{ для каждого } x\in A.$$

Эти $\hat{a}$ также можно рассматривать как «расплывчатые элементы» в A. Они связаны с четкими $a\in A$, и определению таких расплывчатых элементов предшествует определение расплывчатого равенства в A. В общем случае точек и синглетонов в Ω-множестве $\mathbb{A}$ больше, нежели в начальном множестве A. Ω-множество $\mathbb{A}$ называют полным, если каждый его синглетон есть $\hat{a}$ при некотором единственном a.

Приведем теперь замечание относительно классификатора подобъектов. Определим сначала стрелку $\mathrm{true}:1\to\Omega$, полагая

$$[\![\mathrm{true}(\varnothing)\approx p]\!]=[\![p\approx 1]\!]_\Omega.$$

Другими словами, p есть $\mathrm{true}(\Omega)$ в той мере, в какой p совпадает с единицей в Ω. Этой мерой есть p. Доказывается, что этим действительно определяется классификатор подобъектов в $\Omega-\mathrm{Set}$.

Рассмотрим еще произвольные элементы объекта Ω. Они, как известно, образуют алгебру Гейтинга.

Пусть q — элемент алгебры Гейтинга Ω. Построим для него стрелку $\hat{q}:1\to\Omega$ — элемент объекта Ω. Положим:

$$[\![\hat{q}(\varnothing)\approx p]\!]=[\![p\approx q]\!]_\Omega.$$

Легко проверяется, что этим действительно определяется элемент объекта Ω. В частности,

$$[\![\mathrm{false}(\varnothing)\approx p]\!]=[\![p\approx 0]\!]_\Omega=p\Leftrightarrow 0=\bar{p};\mathrm{false}=\hat{0}.$$

То обстоятельство, что исходная алгебра Гейтинга определяет классификатор подобъектов в рассматриваемой категории расплывчатых множеств, оправдывает для нее обозначение Ω. При этом переход $q\to\hat{q}$ связывает также алгебры Гейтинга Ω и $\mathrm{Mor}(1,\Omega)$.

11. Краткий психоинформационный анализ и интерпретация расплывчатого топоса психотипов. В п. 3 под четким множеством любого психотипа понималось обычное множество I всех индивидов (объектов или субъектов), которые имеют данный «чистый» тип. «Чистый» тип — это тип классической соционики Аугустинавичюте, который определяется при помощи тех или иных классических соционических тестов.

С теоретико-множественной точки зрения характеристическая функция чистого типа на элементах множества I равна 1, когда тип принадлежит I, и 0, когда не принадлежит. Для расплывчатых типов характеристическая функция или функция принадлежности принимает значения от 0 до 1. В этом случае функцию принадлежности можно интерпретировать как истиностное значение или как меру принадлежности индивида данному типу.

Очевидно, что для каждого чистого (идеального) типа существует большое количество расплывчатых подтипов в зависимости от значений функции принадлежности. Каждый из расплывчатых подтипов является объектом категории расплывчатых типов (в нашем случае категории $\Omega-\mathrm{Set}$, которая является топосом). Как и в случае топоса Set, в расплывчатом топосе чистые типы как одноэлементные множества (синглетоны) являются конечными объектами, а «пустой» тип (tabula rasa) — начальным объектом.

Одной из специфических черт расплывчатых типов есть то, что они могут быть одинаковыми расплывчатыми подтипами разных четких типов, что ведет к неоднозначности в определении типа. А такая неоднозначность весьма часто наблюдается даже в классической соционике при классическом тестировании. В этом случае может стать полезным понятие множества α-уровня расплывчатого множества A, под которым понимается множество (в обычном смысле) A_α всех таких элементов некоторого универсального множества U, степень принадлежности которых расплывчатому множеству A больше или равна α, т. е. $A_\alpha = \{u \mid f_A(u) \geq \alpha\}$.

Очевидно, что расплывчатый топос типов $\Omega-\mathrm{Set}$ средуцируется в обычный топос четких типов Set, когда функция принадлежности будет принимать только два значения 0 или 1.

В заключение отметим, что актуальным остается дальнейший детальный психоинформационный анализ и экспликация расплывчатого топоса психотипов и, в частности, расплывчатой таблицы Ляшкявичюса-Аугустинавичюте.

Литература:

1. *Дубров Я. А.* Концептуальное и математическое моделирование в соционике. // Соционика, ментология и психология личности. — 1999. — №5. — С. 55-66.
2. *Дубров Я. О., Фарович Л. Я.* Алгебра Аугустинавічюте тілесно-психоментальних систем: основні теореми. // Сьома Всеукраїнська наук. конф. «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». Тези доповідей. — Львів, 2000. — С. 40-41.
3. *Дубров Я. О.* Алгебра Аугустинавічюте homo sapiens: основні концепції, моделі та теореми. Підвалини категорної соціоніки. // Форум. — 2003. — №1. — С. 4-32.
4. *Копнов В. А.* Нечеткие подмножества социона (рукопись), Екатеринбург, 18 с.
5. *Плоткин Б. И.* Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных. — М., 1991. — 448 с.
6. *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики. — М., 1983. — 488 с.
7. *Рассева Х., Сикорский Р.* Математика метаматематики. — М., 1972.

Статья поступила в редакцию 07.02.2008 г.