## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В СОЦИОНИКЕ

УДК 159.9.075

**Дубров Я. А.**

# О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ УНИВЕРСАЛЬНОГО *B*-ПРОСТРАНСТВА БУКАЛОВА

Предлагается математическая модель универсального пространства, в рамках которой можно описывать физические, психоинформационные и интеллектуальные аспекты реального мира. Используются результаты и методы теории вероятностей, теории информации, квантовой механики, алгебры и теории линейных пространств.

*Ключевые слова*: психоинформационное пространство, соционика, алгебра.

### 1. Понятие *B*-пространства Букалова

*B*-пространство *B* (*Ψ, I, X, T, p, E*) как единое психоинформационное пространственно-временное импульсно-энергетическое пространство было введено А. Букаловым в работе [1]. По его мнению, проекциями этого пространства является психоинформационное пространство (*Ψ, I*), пространство-время (*X, T*) и пространство энергии-импульса (*p, E*). Нам кажется, что *B*-пространство можно рассматривать как универсальное физико-психоинформационно-ментальное пространство.

### 2. Контуры программы поэтапного моделирования *B*-пространства

Первым этапом в моделировании *B*-пространства является вероятностное пространство Колмогорова, под которым понимается множество *n*-мерных случайных величин, каждая компонента которых определяется на вероятностном множестве Колмогорова, т. е. на борелевом поле множеств (σ-алгебре множеств) с вероятностной мерой. Частными случаями пространства Колмогорова можно считать известное байесовское пространство и метрическое нормированное вероятностное пространство Минковского, под которым понимается *n*-мерное векторное пространство случайных векторов, на которых определяются операции покомпонентного сложения, вычитания и умножения на число. Кроме того, при помощи покомпонентной разности векторов по модулю определяется расстояние, которое индуцирует соответствующую норму.

На стыке квантовой механики и теории вероятностей сформировалось квантово-механическое пространство Шредингера-Гайзенберга, под которым понимается гильбертово пространство на элементах-векторах из волновых функций. Расстояние в этом пространстве определяется как норма разности векторов, а норма определяется через скалярное произведение векторов.

Вторым этапом моделирования *B*-пространства является информационное пространство Шеннона с элементами-случайными векторами (процессами). Определяется информационное расстояние между векторами ξ и η как сумма условных собственных информаций ξ при условии η и η при условии ξ т. е. $d(\xi, \eta)= J(\xi / \eta)+ J(\eta / \xi)$. В качестве нормы ξ выбирается собственная информация $J(\xi, \xi)$, которая равна энтропии $H(\xi)$.

На третьем этапе строится квантово-механическое информационное пространство Шредингера-Шеннона, которое является синтезом квантово-механического вероятностного пространства Шредингера-Гейзенберга и информационного пространства Шеннона.

В качестве примеров рассматриваются психоинформационное пространство Аугустинавичюте-Букалова, генетическо-информационное пространство Гамова и ядерно-информационное пространство Менделеева.

### 3. Вероятностное пространство Колмогорова

Вероятностным множеством Колмогорова назовем объект $Pr = \langle \mathbf{\Omega}; P: \mathbf{\Omega} \rightarrow [0, 1] \rangle$, где $\mathbf{\Omega}$ — семейство подмножеств множества Ω, которое удовлетворяет определенным аксиомам, и называется борелевым полем множеств или σ-алгеброй множеств; отображение $P$ является числовой функцией, а $P(A)$ называется вероятностью подмножества (события) $A$ и также удовлетворяет определенным аксиомам.

Вероятностным пространством Колмогорова будем называть совокупность $n$-мерных случайных величин (векторов) $\xi(\omega)= (\xi_1(\omega), \ldots ,\xi_n(\omega))$, где $\xi_i$, $i= 1, \ldots , n$ — компоненты $\xi$, $\omega\in\Omega$ — элементарные события.

Основной характеристикой многомерной случайной величины есть ее функция распределения.

### 4. Байесовское вероятностное пространство

Частным случаем пространства Колмогорова есть байесовское вероятностное пространство, которое можно рассматривать как совокупность векторов, каждая компонента которых является парой вида $(x_i ,p_i)$, где $x_i$ — конечное множество значений случайной величины, а $p_i= p(x_i)$ — вероятность значения $x_i$ .

Векторы байесовского пространства можно рассматривать как вероятностные векторы вида $\boldsymbol{p}=(p_1 , \ldots, p_m )$ с компонентами-вероятностями. Байесовское пространство является линейным метрическим пространством относительно операций покомпонентного сложения и вычитания векторов и их умножения на число [2], а также относительно метрики, которая определяется расстоянием, являющимся модулем обычной покомпонентной разности векторов.

### 5. Метрическое нормированное вероятностное пространство Минковского

Рассматривается $n$-мерное векторное пространство, состоящее из случайных векторов. На векторах этого пространства определяются обычные операции покомпонентного сложения, вычитания и умножения на число. Скалярное и векторное расстояния определяются при помощи покомпонентной разницы векторов по модулю. Скалярное расстояние как сумма компонент векторного расстояния индуцирует норму и удовлетворяет соответствующим условиям нормы. $n$-мерное векторное вероятностное пространство с определенным на нем расстоянием и нормой называется метрическим нормированным вероятностным пространством Минковского.

### 6. Квантово-механическое вероятностное пространство Шредингера-Гайзенберга

Основой этого пространства является волновая функция Шредингера. С волновой функцией связывают понятие волны вероятности или вероятностной волны [3]. Именно волновая функция имеет вероятностный характер и служит основой определения плотности вероятности элементарной частицы. Действительно, волновая или ψ-функция является комплексной функцией $\psi(x, y, z, t)$ пространственных координат и времени, описывающих ее состояние, и кроме того, она удовлетворяет условию равенства единице интеграла по всему пространству-времени ее модуля. Далее, в силу того, что над волновой функцией выполняются различные линейные преобразования, подобные линейным преобразованиям векторов и вычислениям скалярных произведений, вместо волновых функций используются более абстрактные объекты, которые обозначаются через $|\psi\rangle$ и $\langle\psi|$ и которые мы представляем себе как вектор-столбцы (кет-векторы) и вектор-строки (бра-векторы) соответственно некоторого гильбертового (линейного) пространства.

Для любых двух векторов $|\psi\rangle$ и $|\chi\rangle$ определено скалярное произведение $\langle\chi|\psi\rangle$, которое является комплексным числом. Действительное неотрицательное число $\langle\psi|\psi\rangle$ по определению является квадратом длины вектора $|\psi\rangle$, а величину $||\psi|| = \sqrt{< ш| ш>}$ называют нормой вектора $|\psi\rangle$.

Расстояние в пространстве Шредингера-Гейзенберга определяется следующим образом: $d(\psi, \chi) = ||\psi - \chi||$.

Отметим в заключение, что $|\psi|^2 = \psi \cdot \psi^*$ играет роль плотности вероятностей.

### 7. Информационное пространство Шеннона

В соответствии с теорией информации К. Шеннона каждому случайному вектору (или процессу) ставится в соответствие энтропия, которая численно характеризует ту ситуацию неопределенности, которая описывается функцией распределения компонент вектора. Для случайных векторов определяется количество взаимной информации, которая содержится в одном векторе относительно другого. Если векторы независимы, то взаимная информация равна нулю. Энтропия является количеством собственной информации в векторе относительно самого себя. Логически связать энтропию вектора с его нормой, а взаимную информацию двух векторов — с расстоянием между этими векторами. Таким образом, для преобразования векторного пространства в информационное пространство (метрическое и нормированное) необходимо ввести расстояние (метрику), которая бы имела информационный смысл, и норму, которая допускала бы интерпретацию в информационных терминах.

В качестве расстояния (информационного) в информационном пространстве выберем следующее число: $d(\xi,\eta) = I(\xi / \eta) + I(\eta / \xi)$, где условная информация дается выражениями $I(\xi / \eta) = I(\xi, \xi) — I(\xi, \eta)$ и $I(\eta / \xi) = I(\eta, \eta) — I(\xi , \eta)$.

Можно показать, что информационное расстояние неотрицательно, невырожденно, симметрично и удовлетворяет неравенству треугольника.

В качестве нормы вектора $\xi$ выбираем его собственную информацию $I\ (\xi, \xi)$ или энтропию.

Таким образом, под метрическим нормированным пространством Шеннона мы понимаем совокупность случайных векторов (а возможно, и интервалов [4] с соответствующим «урезанным» распределением) с информационной метрикой (расстоянием) и информационной нормой.

### 8. Квантово-механическое информационное пространство Шредингера-Шеннона

Пространство Шредингера-Шеннона является своеобразным синтезом квантово-механического вероятностного пространства Шредингера-Гейзенберга и информационного пространства Шеннона. Действительно, в пространстве Шредингера-Гейзенберга рассматриваются случайные вектора (кет- и бра-) и распределение (плотность) вероятностей. Это индуцирует рассмотрение информационного пространства, если для каждой компоненты вектора определить свойственную ей вероятность, а для каждого интервала — соответствующее урезанное вероятностное распределение. В этом случае вполне естественным есть определение информационного расстояния посредством суммы собственных условных информаций и нормы как энтропии или собственной информации вектора (процесса или интервала).

Итак, пространство Шредингера-Шеннона — это совокупность случайных векторов (или интервалов) с соответствующими операциями (сложение, вычитание, умножение на скаляр), с информационным расстоянием (метрикой) и энтропийной нормой.

### 9. Психоинформационное пространство Аугустинавичюте-Букалова

В работе [5] было показано, что социон как детерминированное множество бинарных тетрад психотипов образует линейное метрическое пространство. Если вес двоичного вектора считать за норму пространства, то социон является линейным нормированным метрическим пространством. При этом операции неравнозначности и конъюнкции на межтипных отношениях (а также на типах) образуют алгебру Аугустинавичюте-Жегалкина [5].

Для преобразования социона в вероятностное пространство будем считать, что каждая психическая функция на своей позиции в тетраде имеет определенную вероятность, а ее комплементарная психическая функция — вероятность, которая численно дополняет первую до 1.

В дальнейшем мы будем считать, что каждая психическая функция может трансформироваться в некоторую другую дуальную ей психическую функцию то ли по причине неадекватного тестирования, то ли по причине определенного «артистизма» тестируемого, то ли по другим причинам. В результате получим матрицу трансформации психических функций (а также тетрад или октетов). На пересечении $K$-ой строки и $L$-го столбца расположен элемент $P_{KL}=P(L / K)$, т. е. условная вероятность трансформации $K$-ой психической функции в $L$-ю. Из структуры матрицы можно сделать вывод, что компоненты тетрады статистически независимы.

Используя матрицу трансформаций психических функций, можно рассчитать условные вероятности трансформации ТИМов как векторов то ли в виде тетрады, то ли в виде октады. При этом учитывается факт статистической независимости компонент вектора.

Таким образом, используя результаты работы [5] и пункта об информационном пространстве Шеннона, можно убедиться, что вероятностный социон является линейным нормированным метрическим психоинформационным пространством, которое мы будем называть пространством Аугустинавичюте-Букалова.

### 10. Генетически-информационное пространство Гамова

Подобным же образом, как и в случае психоинформационного пространства, можно поступить и в случае генетически-информационного пространства (ГИП). Элементами ГИП будут векторы (слова, триады), которые называются кодонами и из которых конструируется генетический код. Поскольку кодоны РНК-текстов строятся из четырех нуклеотидов-основ нуклеиновых кислот: аденин (А), гуанин (Г), цитозин (Ц), урацил (У), то можно, как и в предыдущем случае, каждому нуклеотиду приписать определенную вероятность его появления в кодоне (на произвольном месте). Это дает возможность нахождения вероятности появления кодона в генетическом тексте при условии статистической независимости появления отдельных нуклеотидов в кодоне. Далее, учитывая наличие явления мутаций как реального феномена, необходимо рассматривать условные вероятности трансформаций как отдельных нуклеотидов, так и кодонов (и даже больших генетических текстов). На первом этапе можно считать, что мутации нуклеотидов статистически независимы. В этом случае условные вероятности трансформации (мутации) нуклеотидов образуют матрицу трансформации нуклеотидов (матрицу нуклеотидных мутаций) размером $4\times4$.

Допустим, что мутации нуклеотидов в кодоне статистически независимы. Тогда условная вероятность мутации одного кодона в другой будет равняться произведению трех условных вероятностей мутации нуклеотидов, расположенных на соответствующих местах в кодоне. Сами же вероятности мутаций нуклеотидов выбираются из матрицы нуклеотидных мутаций.

Матрица мутации кодонов имеет размер $64\times64$. Но поскольку 64 кодона кодируют 20 канонических аминокислот, то генокод вырожденный, т. е. одной аминокислоте может отвечать несколько кодонов. Для нахождения условной вероятности мутации одной аминокислоты в другую необходимо учитывать факт вырожденности генокода. При учете этой вырожденности необходимо суммировать соответствующим образом нуклеотидные условные вероятности по тем кодонам, которые кодируют данную аминокислоту. В результате мы получим матрицу мутаций аминокислот.

Отметим, что свойство вырожденности генокода позволяет реализовать повышенную устойчивость генокода относительно некоторых мутаций. Таким образом, генокод напоминает структуру обнаруживающих и корректирующих кодов. Это, в частности, влияет на передачу и особенно прием корректной информации. Эту информацию можно находить, используя алгоритм Шеннона, т. е. алгоритм вычисления информации по известным условным вероятностям трансформации кодовых слов (кодонов) [7].

Еще одно свойство генокода связано со существованием нескольких бессмысленных кодонов, которые не соответствуют ни одной аминокислоте. Они играют роль определенных стоп-сигналов при синтезе белка, инициируя и финализируя его синтез. Однако такая роль этих кодонов не нивелирует их информационную сущность в смысле передачи информации.

Алгебра Гамова-Жегалкина определяется при помощи операции покомпонентного сложения кодонов по $mod4$ и их покомпонентной конъюнкции $min(x , y)$ [8]. Определяется также соответствующая операция умножения на скаляр. Отметим, что относительно операции сложения и умножения на скаляр алгебра Гамова-Жегалкина является алгеброй Минковского [6]. Далее, имея в наличии вероятности появления кодонов и матрицу мутаций аминокислот, можно преобразовать геном в генетическо-информационное пространство Гамова, определив для этого информационное расстояние и информационную норму по правилу, предложенному в предыдущих пунктах. Таким образом, в пространстве Гамова интегрируются генетические и информационные структуры.

### 11. Ядерно-информационное пространство Менделеева

Еще одним примером универсальности *B*-пространства является пространство Менделеева, которое строится на базе алгебры Менделеева-Минковского. Сущность этой алгебры состоит в кодировании атомных ядер двумерными векторами на целыми положительными числами и в определении на этих векторах операций сложения и вычитания по модулю, а также умножения на скаляр. Дальнейшее определение расстояния между векторами и нормы на векторах преобразует таблицу атомных ядер (периодер) в линейное пространство Менделеева-Минковского [6]. Преобразование пространства Менделеева-Минковского в ядерно-информационное пространство Менделеева осуществляется таким же образом, как и в предыдущих случаях. Для этого фиксируется вероятность появления различных ядер и вероятность тех или других ядерных реакций. Введение на этой основе информационного расстояния и информационной нормы и дает пространство Менделеева.

### 12. Геометрическая интерпретация

Легко видеть, что психоинформационное пространство Аугустинавичюте-Букалова, генетическое информационное пространство Гамова и ядерно-информационное пространство Менделеева являются дискретными евклидовыми пространствами размерности 4, 3 и 2 соответственно. Если психоинформационное пространство является бинарным четырехмерным кубом с 16 точками-тетрадами, генетическо-информационное пространство — четырехарным трехмерным пространством с 64 точками-кодонами, который содержит как некоторое фактор-подпространство пространство с 20 точками-аминокислотами, то ядерно-информационное пространство является целочисленным двумерным пространством с подпространством-периодером и подпространством изотопов. В силу предыдущего целесообразно в дальнейшем рассмотреть детальнее евклидовость предыдущих пространств.

### Литература:


1. *Букалов А. В.* Теория психоинформационного пространства, его полей и структур. Общая концепция. // Соционика, ментология и психология личности. — 1999. — № 5. С. 3-6.
2. Дубров Я. *А.* Вопросы моделирования качества как лингвистической переменной. Сб. «Повышение качества электронно-лучевых приборов. Материалы научно-технической конференции». — Наукова думка, К. , 1981. С. 129-135.
3. *Эйнштейн А. , Инфельд Л.* Эволюция физики. — М. , 1956.
4. *Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х.* Методы интервального анализа. — Новосибирск, 1986, 222 с.
5. *Дубров Я. О.* Алгебра Аугустинавічюте-Жеґалкіна лоґіко-динамічних систем та індуктивні методи тестування. Зб. «Міжнародна конф. з індуктивного моделювання. Праці в 4-х томах», т. I, ч. 2, — Львів, 2002, с. 47-54.
6. *Дубров Я.* Моделювання неоднорідних системних середовищ: алгебри Мінковського. Зб. «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур», Львів. — 2003, с. 496-498.
7. *Грицык В. В., Дубров Я. А.* Об алґоритме определения общей формулы принятой информации для одного класса эквивалентных кодов. Сб. «Методы отбора и передачи информации». Наук. думка, — К., 1967, с. 43-62.
8. *Дубров Я. О.* Алґебра Ґамова-Жеґалкіна кодонів та міжкодонних мутацій генокоду. Зб. «Наукові Читання, присвячені пам'яті академіка Я. С. Підстригача», Львів, 2002, с. 6-7.


*Статья поступила в редакцию 12.08.2003 г.*